SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Magdalena Igaly

VIZUALIZACIJE U MATEMATICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Tijekom povijesti, ljudi su matematičke ideje i algebarske tvrdnje izražavali, prikazivali i nastojali objasniti slikama te geometrijskim putom, a razlog tomu bio je nerazvijen matematički rječnik. Možemo uočiti kako je u staro doba matematika bila empirijska, odnosno do spoznaja se dolazilo tek opažanjem, mjerenjem i vizualizacijom. Začetnik uvođenja dokaza u današnjem smislu, odnosno kao konačnog slijeda logično izvedenih tvrdnji je Tales (7./6. st. pr. Kr.). U matematiku ga uvodi Pitagora (6./5. st. pr. Kr.). Matematički dokazi su izuzetno važni za razumijevanje matematičkih zakonitosti i stoga ne čudi što imaju tako dugu tradiciju. Međutim mnogi učenici, uglavnom viših razreda osnovne škole i srednjih škola, imaju problema s razumijevanjem matematičkih dokaza i zbunjeni su prijelazom s konkretnog (brojevi) na apstraktno (slova). Matematika u školi se često prikazuje kao alat ili skup tehnika pomoću kojih možemo nešto konkretno izračunati ili riješiti neki problem. Stoga se često javlja pitanje čemu uopće služe matematički dokazi i zašto je potrebno dokazivati nešto za što je već poznato da vrijedi. Odgovor na to pitanje dao je Andrew Gleason koji kaže kako *cilj dokaza nije da nas uvjeri da je nešto istinito već da nam pokaže zašto je to istinito.* U razredu se, kao kontrast strogom matematičkom dokazu, možemo poslužiti vizualnim prikazima, crtežima, modelima... Martin Gardner tvrdio je da *suhoparan dokaz može toliko jednostavno i predivno biti dopunjen geometrijskim analogonom da je dokaz teorema gotovo vidljiv na prvi pogled.*

U ovom radu prikazane su različite vizualizacija koje su, osim s matematičkog, zanimljive i s pedagoškog stajališta. Kreativna vizualizacija i sposobnost stvaranja mentalnih slika, jedan je od važnih alata koji pomažu razumijevanju matematičkih ideja, koncepata i dokaza. Jednostavan, elegantan i slikovit prikaz dokaza, učenicima se posebno sviđa zbog zornosti i reduciranog teksta. Danas se za takvu vrstu dokaza uvriježio naziv *dokaz bez riječi.* U radu ćemo prikazati kako možemo vizualizirati neke osnovne matematičke pojmove, operacije i dokaze primjenjujući tradicionalnu, ali i suvremenu tehnologiju. Danas je ta implementacija slikovnog predočavanja vrlo važna jer u školi sjede mladi iz tzv. Z-generacije (rođeni između 1996. i 2010.) i djeca tzv. Alpha-generaciju (rođeni nakon 2011.) kojima tehnologija, koja uglavnom rabi vizualizaciju, nije samo alat već je prirodno integrirana u njihov život.

Ipak, valja napomenuti kako vizualni dokazi, unatoč pozitivnim reakcijama učenika, kriju u sebi neke zamke ako im se ne pristupi kritički te nikako ne mogu zamijeniti dokaz u klasičnom smislu. Primjer toga je vizualni dokaz "jednakosti" $64 = 65$ koji je dan na kraju rada. Napomenimo da se u mnogim vizualnim dokazima radi o *nepotpunoj indukciji*, odnosno o principu zaključivanja na temelju nekoliko posebnih ili pojedinačnih slučajeva, ali ne i svih mogućih slučajeva. Primjerice, iako komutativnost zbrajanja i množenja vrijedi za sve brojeve, pozitivne, negativne i nulu, vizualizaciju ćemo prikazati samo za brojeve veće od nule. Također, u nekim primjerima realan broj prikazujemo pomoću duljine dužine, pa je, ponovno, promatrani skup brojeva sužen samo na one pozitivne. Nepotpuna indukcija nema snagu dokaza no ipak omogućava "otkrivanje" nekih činjenica. Dakle, iza dokaza bez riječi i drugih vizualizacija stoji niz zamki, no to nije razlog da ih se izbjegava već mudro koristi. Naime, vizualizacije u matematici potrebno je shvatiti kao oplemenjivanje koje potiče maštu i kreativnost no one bi uvijek trebale biti popraćene adekvatnim objašnjenjem i pravim dokazom.

Poglavlje 1

Jednostavne vizualizacije

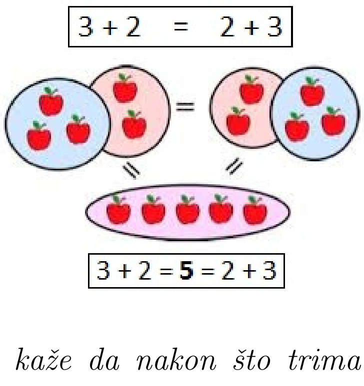
1.1 Komutativnost zbrajanja i množenja

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ može se definirati aksiomatski kao *potpuno uređeno polje* iskazivanjem svih svojstva s obzirom na algebarsku strukturu i uređaj. Između ostalog operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstvo komutativnosti, to jest

$$x + y = y + x, \;\; x \cdot y = y \cdot x,$$

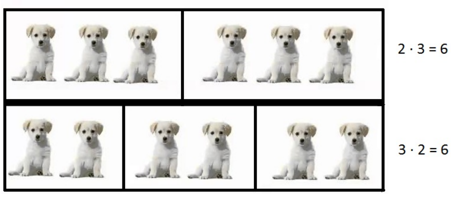
za sve $x, y \in \mathbb{R}$. S tim se svojstvom učenici susreću već u nižim razredima osnovne škole pri čemu se govori o komutativnosti zbrajanja, odnosno množenja u skupu prirodnih bojeva, $\mathbb{N}$.

Primjer 1.1.1. *Koristeći tehniku vizualizacije, pokažimo da vrijedi* $3 + 2 = 2 + 3$.



Lijeva strana jednakosti kaže da nakon što trima jabukama dodamo još dvije, ukupno imamo pet jabuka. Na desnoj strani jednakosti pak dvjema jabukama dodajemo tri te ih na kraju ponovno imamo pet. Učenicima je takav račun poznat iz svakodnevnog života te većini ne predstavlja problem.

Primjer 1.1.2. *Koristeći tehniku vizualizacije, pokažimo da vrijedi* $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$.

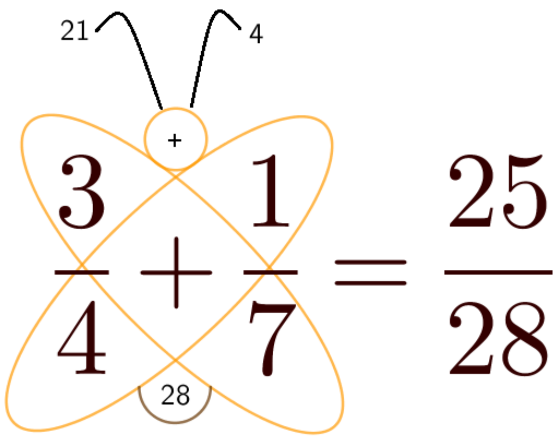


U gornjem redu nalazi se dva puta po tri psa, odnosno ukupno njih šest, a u donjem redu imamo tri puta po dva psa, dakle ponovno ih je šest. Vidimo da u oba slučaja na kraju imamo jednak broj pasa. Na ovaj način učenicima smo zorno prikazali još jedno važno svojstvo množenja prirodnih brojeva.

Naravno da jabuke, odnosno pse, možemo zamijeniti bilo kojim opipljivim predmetom. Svrha je samo da učenicima osnovne škole apstraktne matematičke operacije približimo njima razumljivijem jeziku.

1.2 Zbrajanje i oduzimanje razlomaka - model leptira

Zbrajanje i oduzimanje razlomaka nastavna je jedinica koju učenici usvajaju u 6. razredu osnovne škole. U idućem je primjeru dana slikovna metoda zbrajanja razlomaka.



Slika 1: Zbrajanje razlomaka pomoću modela leptira

Potrebno je odrediti rezultat zbrajanja $\frac{3}{4} + \frac{1}{7}$. Promotrimo Sliku 1. Brojnik ćemo dobiti tako da pomnožimo brojeve unutar svakog od krila leptira te dobivene umnoške zbrojimo:

$$3 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 25$$

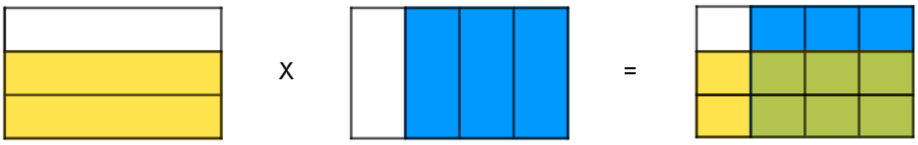
Nazivnik je jednak umnošku nazivnika pribrojnika:

$$4 \cdot 7 = 28$$

Opisana metoda primjenjiva je i kod oduzimanja razlomaka s time da tada dobivene umnoške unutar krila leptira ne bismo zbrajali već oduzimali. Također, ukoliko nazivnici razlomaka koje zbrajamo ili oduzimamo nisu relativno prosti, dobiveni rezultat potrebno je na kraju skratiti.

1.3 Množenje razlomaka - model pravokutnika

U 6. razredu osnovne škole učenici se prvi puta susreću s operacijom množenja razlomaka. Kao uvod u novu nastavnu jedinicu, možemo iskoristiti slikovnu interpretaciju, danu u idućem primjeru. Ovom vizualizacijom moguće prikazati samo razlomke veće od nule.



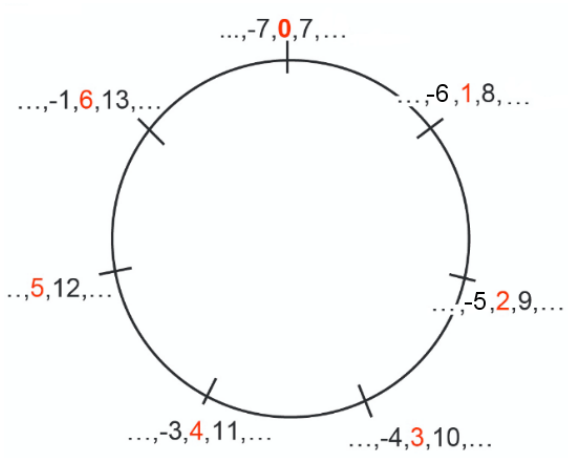
Slika 2: Množenje razlomaka pomoću modela pravokutnika

Zadatak je odrediti rezultat množenja $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$. Promotrimo Sliku 2. Žuti dio na lijevoj strani jednakosti iznosi $\frac{2}{3}$, dok je plavi dio jednak $\frac{3}{4}$. Umnožak ćemo dobiti tako da preklopimo ta dva pravokutnika te odredimo koliko dio velikog pravokutnika čine mali zeleni pravokutnici. Zelenih pravokutnika ima 6, dok se cijeli pravokutnih sastoji od ukupno 12 manjih pravokutnika što razlomkom zapisujemo kao $\frac{6}{12}$. Dakle:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

1.4 Modularna aritmetika

Iako učenici osnovnih i srednjih škola nisu još upoznati s terminom kongruencija i modularne aritmetike, idući primjer većini učenika ipak će biti jasan. U razgovoru se često može čuti kako za 13 sati zapravo kažemo da je 1 popodne, 18 sati poistovjetimo sa 6. Dakle, nakon što smo "namotali" prvi krug od 12 brojeva, krećemo u idući. Zamislimo sada da na krug, umjesto 12 sati namotavamo njih 7 te se ne ograničimo samo na dva namotavanja kao na klasičnom satu, već namotavanje možemo ponavljati u beskonačnost, kao na Slici 3. Iako u školi nećemo spominjati terminologiju kongruencija, matematičkim rječnikom opisali bismo istaknute crvene brojeve kao klase ostataka modulo 7, odnosno kao brojeve koje dobivamo primjenom *Teorema o dijeljenju s ostatkom*.



Slika 3: Klase ostataka modulo 7

Pomoću kružnice kao na Slici 3 možemo uvesti zbrajanje, oduzimanje i množenje modulo m koji se još nazivaju *modularna aritmetika* ili *aritmetika sata*. Na primjer, $2+8$ modulo 7 je ostatak pri dijeljenju zbroja $2+8=10$ brojem 7, odnosno 3. No, pomoću "sata" isti rezultat dobit ćemo tako da iz točke 2 napravimo 8 koraka po kružnici u smjeru kazaljke na satu. Obično pišemo $2+_7 8=3$. Oduzimanje modulo m možemo interpretirati kao kretanje po kružnici obratno od kazaljke na satu, a množenje se može shvatiti kao skraćeno zbrajanje. Na primjer, $3\cdot_7 8 = 8+_7 8+_7 8$. Kako smo se već nakon prvih 8 koraka našli u točki 1, onda možemo zaključiti da ćemo još samo dva puta zakoračati po 1 i rezultat će biti 3.

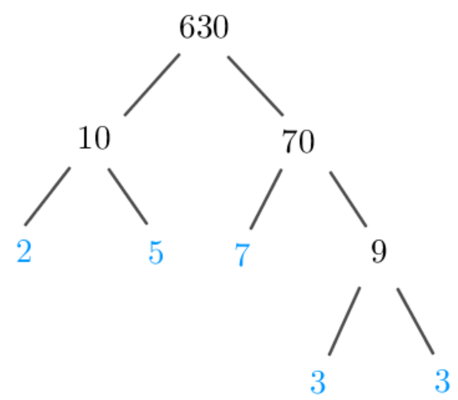
1.5 Rastav broja na proste faktore

Povežemo li znanja iz matematike i kemije, tada proste i složene brojeve možemo promatrati kao atome i molekule. Kao što *združeni* atomi izgrađuju molekule, tako i *pomnoženi* prosti brojevi čine složene brojeve. Primjerice, molekula vode H_2O

građena od 2 atoma vodika i jednog atoma kisika, dok broj $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ "sastavljen" od dva prosta broja 3 i jednog prostog broja 5. Svaki prirodan broj veći od 1 možemo rastaviti na umnožak prostih brojeva jedinstveno do na poredak faktora, pri čemu ako je broj prost onda podrazumijevamo da se umnožak sastoji od samo njega samog. Ta iznimno važna matematička tvrdnja poznata je pod imenom *Osnovni teorem aritmetike*.

U postupku prikazivanja prirodnog broja kao umnožak prostih faktora koristit ćemo vizualizaciju koja sliči na dvodimenzionalni zapis strukture molekule. Na primjer, $630 = 10 \cdot 63$ pa broj 630 granamo na faktore 10 i 63. Budući da su brojevi 10 i 63 složeni, nastavljamo grananje: $10 = 2 \cdot 5$ i $63 = 7 \cdot 9$. Još je jedino broj 9 složen pa njega granamo na $9 = 3 \cdot 3$. Brojevi 2, 5, 7 i 3 su prosti, oni predstavljaju atome koje nije moguće dijeliti pa tu postupak završava. Broj 630, rastavljen na proste faktore, jednak je umnošku brojeva na kojima staje dijeljenje, odnosno

$$630 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3.$$



Slika 4: *Složena "molekula"* 630 rastavljena na *proste "atome"* 2,3,3,5 i 7

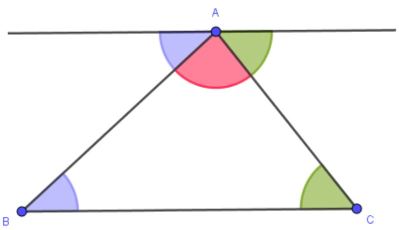
Poglavlje 2

Planimetrija

Planimetrija je dio elementarne geometrije u kojem se proučavaju svojstva likova u ravnini ili kraće zvana *ravninska geometrija*, a vizualne metode predstavljaju ključan dio u njenom tumačenju i poučavanju. U ovom poglavlju predstavit ćemo *dokaze bez riječi* nekih važnih teorema planimetrije, kao što je Pitagorin poučak, te formula za površinu jednostavnih geometrijskih likova.

2.1 Zbroj veličina kutova u trokutu

U 6. razredu osnovne škole učenici se susreću s poučkom koji kaže kako je zbroj veličina svih triju kutova u trokutu 180°. Taj se poučak uvede kroz aktivnost otkrivanja, zatim se iskaže, a onda se i dokaže. Dokaz svakako može olakšati popratna slika:



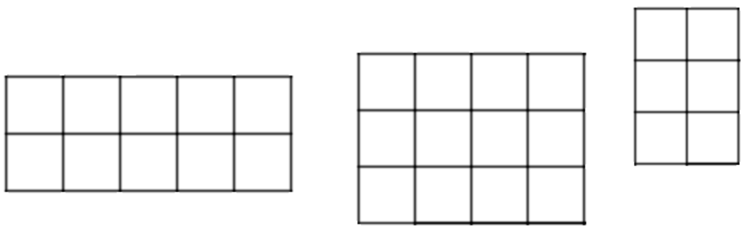
Slika 5: Zbroj veličina kutova u trokutu

Krenemo od trokuta ΔABC. Zatim kroz vrh A povučemo paralelu s BC. Na Slici 2.1 zelenom su i plavom bojom označeni međusobno sukladni kutovi. Zaista, to su kutovi iste vrste uz presječnicu usporednih pravaca pa su sukladni. Sada uočimo da plavi, ružičasti i zeleni kut čine ispruženi kut, odnosno njihov je zbroj 180°.

2.2 Površina pravokutnika

S pravokutnikom se učenici upoznaju već u prvom razredu osnovne škole, dok se formula za njegovu površinu usvaja u četvrtom razredu osnovne škole. Jedan od načina uvođenja formule jest nepotpuno induktivno zaključivanje u kojem važnu ulogu ima vizualni prikaz pojma površine. Naime, površinu pravokutnika možemo shvatiti kao broj jediničnih kvadratića od kojih je sačinjen taj pravokutnik. Primjerice, prebrojavanjem jediničnih kvadratića pravokutnika 1 sa Slike 6 zaključujemo da je njegova površina jednaka 10 što možemo interpretirati kao $5 \cdot 2$, odnosno umnožak duljine i širine pravokutnika. Učenicima je najbolje ponuditi aktivnost u kojoj će sami *otkriti* formulu za površinu pravokutnika. Za aktivnost nam je potreban nastavni listić sa slikama pravokutnika kao na Slici 6 te Tablicom 1. Učenici prebrojavanjem jediničnih kvadratića te određivanjem duljine i širine pravokutnika zaključuju da formula za površinu pravokutnika sa stranicama duljine a i b glasi

$$P = ab.$$



Slika 6: Pravokutnici 1,2,3

	duljina pravokutnika	širina pravokutnika	POVRŠINA
Pravokutnik 1			
Pravokutnik 2			
Pravokutnik 3			
ZAKLJUČAK	a	b	

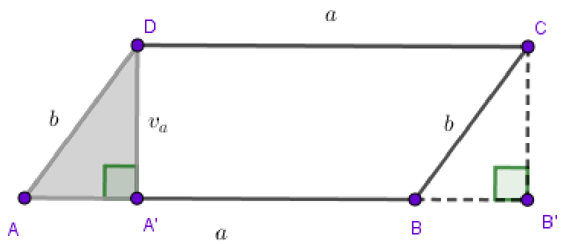
Tablica 1: Nastavni listić za učenike

2.3 Površina paralelograma

Formula za površinu paralelograma kojem je duljina jedne stranice jednaka a, a duljina visine na tu stranicu v_a glasi

$$P = a \cdot v_a.$$

Transformacija paralelograma u pravokutnik jednake površine učenicima pomaže da razumiju i lakše upamte tu formulu. Na Slici 7 je prikazano *premještanje* sivog trokuta na iscrtkano mjesto. To je moguće jer su trokuti $AA'D$ i $BB'C$ sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta ($|AD| = |BC| = b$ i $\angle A \cong \angle B$, $\angle D \cong \angle C$ su kutovi iste vrste s paralelnim kracima).



Slika 7: Transformacija paralelograma u pravokutnik jednake površine

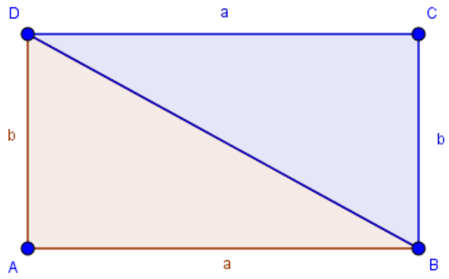
Stoga paralelogram $ABCD$ i pravokutnik $A'B'CD$ imaju istu površinu. Budući da je $A'B'CD$ pravokutnik sa stranicama duljine a i v_a, njegova površina je $a \cdot v_a$ čime smo dokazali željenu formulu za površinu paralelograma.

Specijalno, ista formula vrijedi i za površinu romba jer je romb paralelogram kojemu su sve stranice jednake duljine.

2.4 Površina pravokutnog trokuta

Površina pravokutnika u direktnoj je vezi s površinom pravokutnog trokuta. Naime, dijagonala pravokutnika dijeli taj pravokutnik na dva sukladna pravokutna trokuta prema S-S-S poučku o sukladnosti trokuta (ili S-K-S poučku). Učenicima se u tu svrhu može ponuditi aktivnost u kojoj bi prerezali pravokutnik po dijagonali i ustanovili da su dobili dva pravokutna trokuta koja se međusobno preklapaju, to jest koja su sukladna. Stoga se jednostavno može zaključiti da je površina pravokutnog trokuta čije su duljine kateta a i b jednaka polovici površine pravokutnika s duljinama stranica a i b, to jest

$$P = \frac{ab}{2}.$$

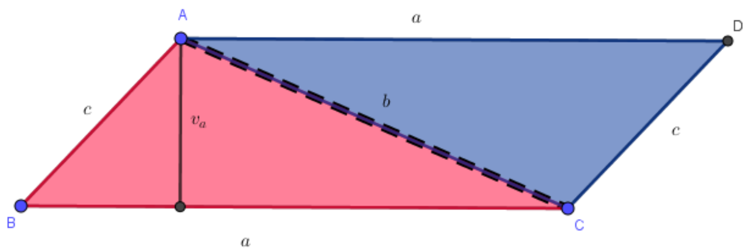


Slika 8: Pravokutni trokut kao polovina pravokutnika

2.5 Površina trokuta

Prvi način

Neka je zadan trokut ABC sa stranicama duljine a, b i c. Kao na Slici 9, možemo ga nadopuniti do paralelograma sa stranicama duljine a i c pomoću još jednog trokuta sukladnog trokutu ABC. Uočimo da je lik $ABCD$ uistinu paralelogram jer su mu nasuprotne stranice sukladne.



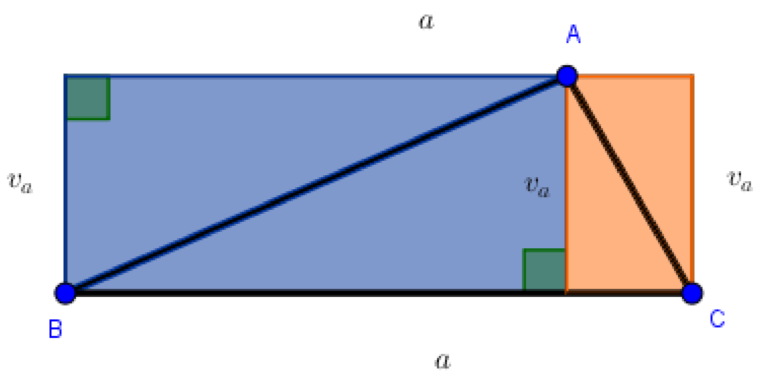
Slika 9: Trokut kao polovina paralelograma

Znamo da je površina dobivenog paralelograma jednaka $a \cdot v_a$. Budući da je paralelogram nastao spajanjem dva sukladna trokuta, površina trokuta ABC jednaka je

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}.$$

Drugi način

Svaki trokut ΔABC, kojemu je duljina jedne stranice a, a duljina visine na tu stranicu v_a, možemo nadopuniti do pravokutnika čije su stranice duljine a i v_a kao što je to učinjeno na Slici 10.



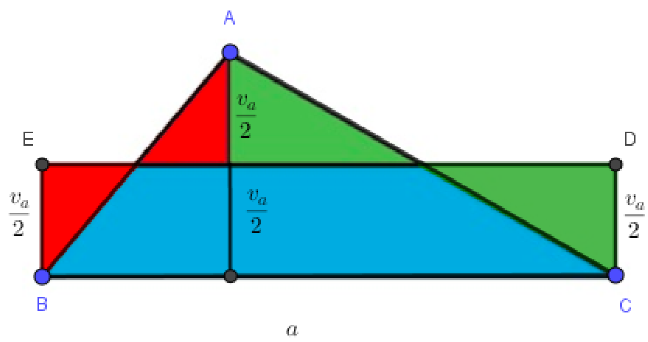
Slika 10: Trokut kao polovina pravokutnika

Uočimo da se dobiveni pravokutnik sastoji od dva plava i dva narančasta trokuta, a početni trokut od jednog plavog i jednog narančastog trokuta. Budući su plavi, odnosno narančasti trokuti međusobno sukladni slijedi da je površina trokuta ABC jednaka polovini površine pravokutnika, to jest

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}.$$

Treći način

Svaki trokut ΔABC, kojemu je duljina jedne stranice a, a duljina visine na tu stranicu v_a, može se presložiti u pravokutnik $BCDE$ čije su stranice duljine a i $\frac{v_a}{2}$ kao što je to učinjeno na Slici 11.



Slika 11: Preslagivanje trokuta u pravokutnik

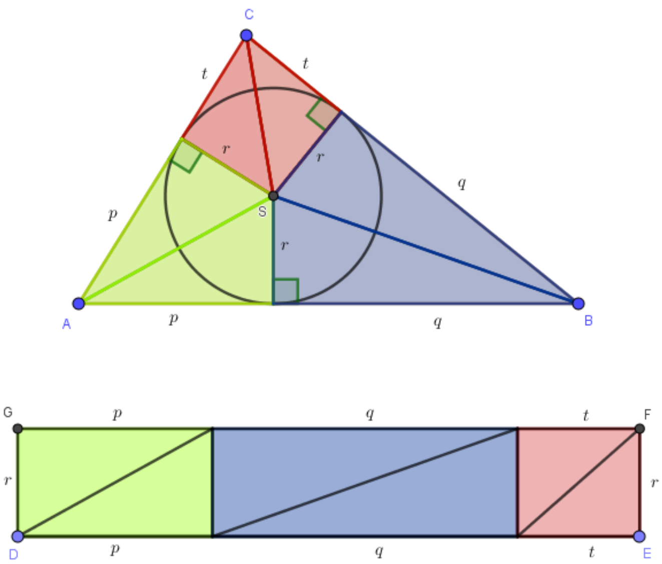
Budući da smo pravokutnik $BCDE$ dobili čistim preslagivanjem dijelova trokuta ΔABC (bez ikakvog dodavanja ili oduzimanja dijelova), površina početnog trokuta mora biti jednaka površini dobivenog pravokutnika, a to je upravo $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Četvrti način

Površinu trokuta možemo računati i pomoću formule

$$P = rs,$$

pri čemu je r polumjer trokutu upisane kružnice, a s poluopseg trokuta, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$. I ovu formulu dokazat ćemo preslagivanjem trokuta u pravokutnik kao na Slici 12.



Slika 12: Preslagivanje trokuta u pravokutnik

Središte upisane kružnice trokutu ABC označimo točkom S. Istaknimo sve dužine čija je jedna krajnja točka S, a druga vrh trokuta, odnosno nožište visine na stranicu trokuta. Na taj smo način $\Delta\ ABC$ podijelili na šest trokuta: dva ružičasta, dva zelena i dva plava. Trokuti jednakih boja su međusobno sukladni što se može lako ustanoviti pozivanjem na, primjerice, S-S-K poučak o sukladnosti trokuta. Uz oznake kao na Slici 12, vrijedi:

$$t + q = a,$$

$$t + p = b,$$

$$p + q = c,$$

pri čemu smo s a, b, c označili duljine stranica trokuta ABC. Zbrajanjem gornjih triju jednakosti, dobivamo:

$$2t + 2q + 2p = a + b + c,$$

odnosno

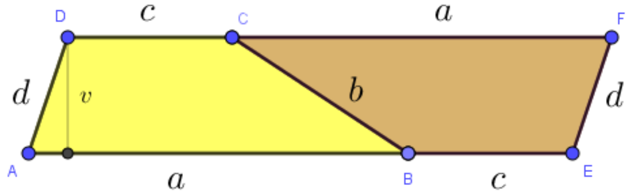
$$t + q + p = s.$$

Budući da su istaknuti trokutići istih boja sukladni i pravokutni možemo ih presložiti u pravokutnik a sva tri "raznobojna" pravokutnika u jedan sa stranicama duljine $p + q + t = s$ i r (v. donju sliku u 12). Jasno je da je površina trokuta ABC jednaka površini pravokutnika $DEFG$, odnosno $P = rs$.

2.6 Površina trapeza

Prvi način

Formula za površinu trapeza uči se u 6. razredu osnovne škole, a pri razumijevanju formule, svakako može pomoći njezina vizualna interpretacija.



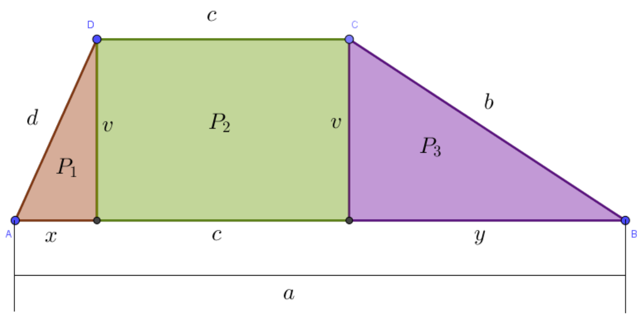
Slika 13: Trapez dopunjen do paralelograma

Na stranicu $\overline{BC}$ trapeza $ABCD$ "nalijepimo" njemu sukladan trapez $BEFC$ na način prikazan na Slici 13. Time smo dobili paralelogram $AEFD$ čije su susjedne stranice duljine $a + c$ i d, dok je duljina visine označena s v. Budući da površina paralelograma iznosi $(a + c) \cdot v$, slijedi

$$P(ABCD) = \frac{P(AEFD)}{2} = \frac{a + c}{2} \cdot v.$$

Drugi način

Sada ćemo površinu trapeza izračunati tako da trapez najprije podijelimo na likove čije površine znamo izračunati pa dobivene iznose zbrojimo.



Slika 14: Trapez podijeljen na pravokutnik i dva pravokutna trokuta

Povlačenjem visina iz vrhova C i D na AB, trapez smo podijelili na tri lika: dva pravokutna trokuta i jedan pravokutnik. Duljine stranica dobivenih likova označimo kao na Slici 14. Površina pravokutnog trokuta s katetama duljine x i v iznosi $P_1 = \frac{xv}{2}$, površina pravokutnika sa stranicama duljine c i v je $P_2 = cv$, a površina pravokutnog trokuta s katetama duljine y i v iznosi $P_3 = \frac{yv}{2}$. Sada možemo izračunati i površinu P trapeza $ABCD$:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{xv}{2} + cv + \frac{yv}{2} = \frac{(x + 2c + y)v}{2}.$$

Kako je $x + c + y = a$, dobivamo

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v.$$

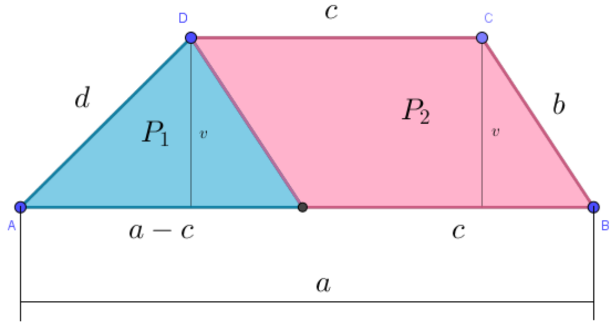
Ovaj izvod formule za površinu trapeza nije primjeren za učenike 6. razreda jer se faktorizacija algebarskih izraza obrađuje tek u 8. razredu, iako učenici znaju primijeniti svojstvo distributivnosti u numeričkim izrazima.

Treći način

Iz vrha D povučemo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ čime trapez podijelimo na dva dijela; na trokut i paralelogram. Trokutu je duljina jedne stranice jednaka $a - c$, a duljina visine na tu stranicu jednaka je duljini visine trapeza $ABCD$, odnosno v. Paralelogram ima stranice duljine c i b te visinu v na stranicu c. Površina trokuta jednaka je $P_1 = \frac{(a-c)v}{2}$, dok površina paralelograma iznosi $P_2 = cv$. Sada možemo izračunati i površinu P trapeza $ABCD$:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{(a-c)v}{2} + cv = \frac{(a-c)v + 2cv}{2} = \frac{(a - c + 2c)v}{2} = \frac{(a+c)v}{2}.$$

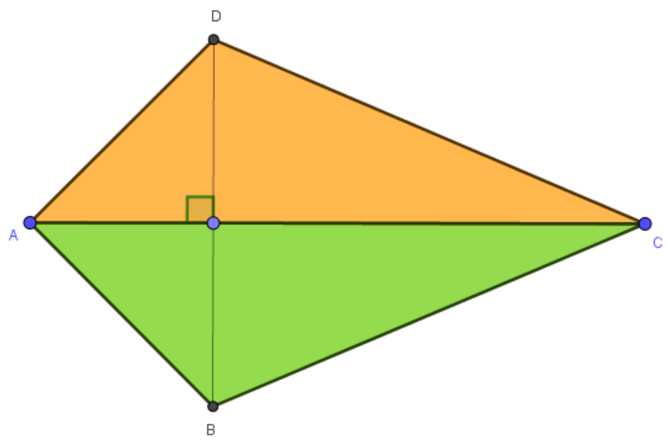
I ovaj izvod ne bi bio u potpusti razumljiv učenicima 6. razreda.



Slika 15: Trapez podijeljen na trokut i paralelogram

2.7 Površina deltoida

Prisjetimo se najprije definicije deltoida. *Deltoid* je četverokut s okomitim dijagonalama kojemu je jedna dijagonala os simetrije. Pri izvodu formule za njegovu površinu, ponovno ćemo koristiti tehniku rastavljanja na likove čiju površinu znamo izračunati.



Slika 16: Deltoid se sastoji od dvaju sukladnih trokuta

Duljine dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ označit ćemo redom slovima e i f. Sa Slike 16 vidimo kako se u našem slučaju os simetrije deltoida poklapa s dijagonalom $\overline{AC}$ iz čega slijedi da dužina $\overline{AC}$ raspolavlja dužinu $\overline{BD}$ te da su trokuti ACD i CAB sukladni. Površina trokuta ΔACD jednaka je polovini umnoška duljine dužine $\overline{AC}$, odnosno e, i duljine visine na tu stranicu koja iznosi $\frac{f}{2}$. Dakle,

$$P(\Delta ACD) = \frac{e \cdot \frac{f}{2}}{2} = \frac{ef}{4}.$$

Stoga je površina deltoida jednaka

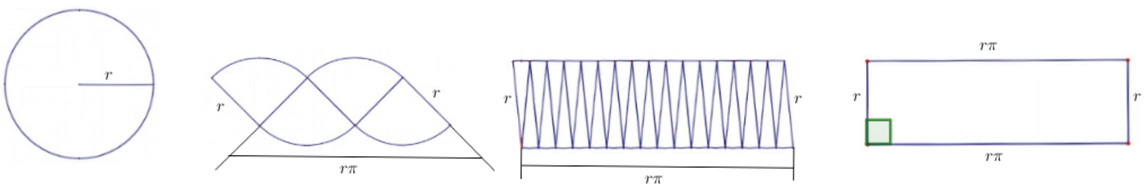
$$P(ABCD) = 2 \cdot P(\Delta ABC) = 2 \cdot \frac{ef}{4} = \frac{ef}{2}.$$

Specijalno, *romb* je deltoid kojemu su sve stranice jednake duljine pa za površinu romba s dijagonalama duljine e i f također vrijedi $P = \frac{ef}{2}$.

2.8 Površina kruga

Prvi način

U 7. razredu osnovne škole učenici se prvi puta susreću s formulom za površinu kruga. Učenicima osnovne škole, a djelomično i srednje škole, ne može se izvesti formula za površinu kruga jer je za to potrebno poznavanje infinitezimalnog računa (limes i integral), no ipak može se dati "opravdanje" formule.



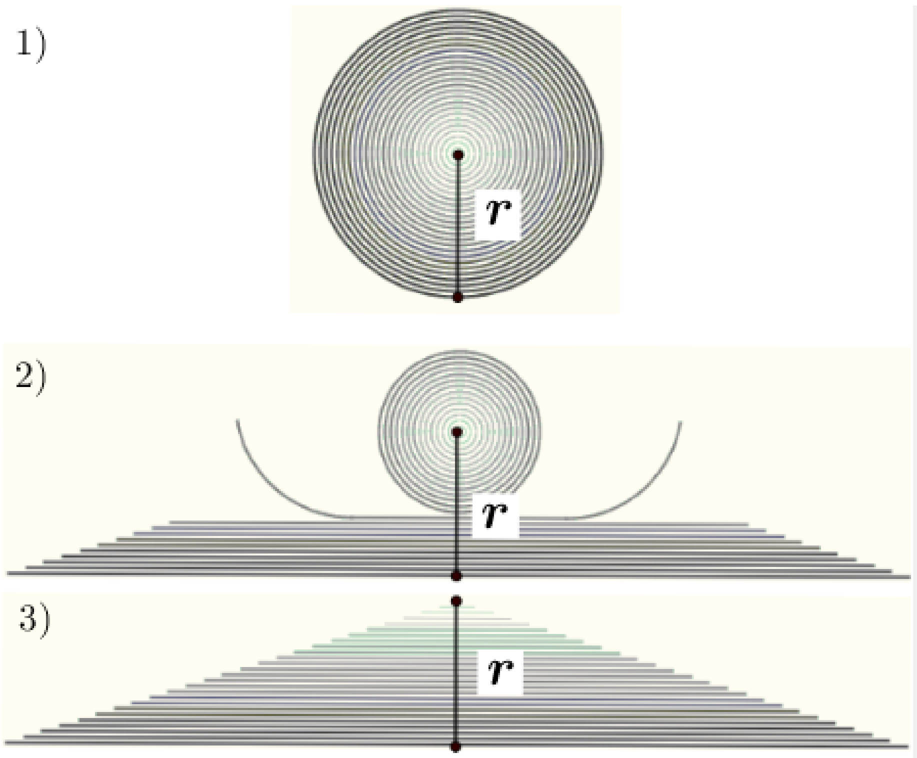
Slika 17: Krug izrezan i presložen na četiri, šesnaest i "beskonačno" mnogo dijelova

Glavna ideja je razrezati krug na sukladne kružne isječke te ih presložiti na način prikazan na Slici 17. Najprije krug izrežemo (pa presložimo) na četiri sukladna dijela pa na osam i na kraju na šesnaest. Uočimo da je ukupna duljina valovitih linija uvijek jednaka opsegu polaznog kruga $2r\pi$, dok je duljina svake ravne linije jednaka r. Nakon preslagivanja dobivamo lik koji nalikuje paralelogramu čije su susjedne stranice duljine $r\pi$ (poluopseg) i r (radijus). Važno je uočiti kako krug i presloženi lik imaju istu površinu jer nismo ništa dodali niti oduzeli, već samo presložili. Zamislimo sada da opisani postupak dijeljenja i preslagivanja nastavimo u beskonačnost. Donje i gornje valovite linije bit će sve ravnije, a kutovi u paralelogramu će biti sve bliže pravom kutu pa ćemo iz "krivolinijskog" paralelograma dobiti pravokutnik sa stranicama duljina r i $r\pi$ čiju površinu znamo odrediti:

$$P = r \cdot (r\pi) = r^2\pi.$$

Smatra se da ova ideja za vizualizaciju formule potiče od Leonarda da Vincija (16. st.) i Satoa Moshuna (17. st.).

Drugi način



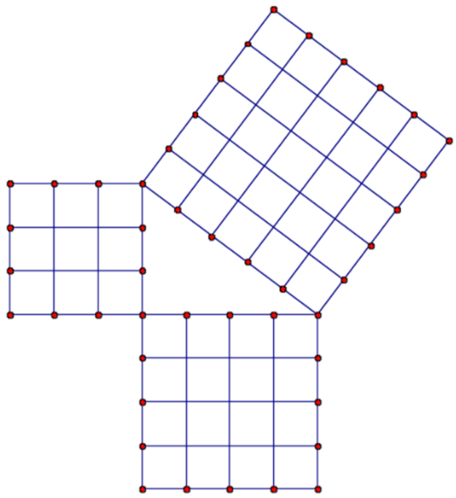
Slika 18: Unutrašnjost kruga presložena u trokut

Krajem 11. i početkom 12. stoljeća, židovski znanstvenik Rabbi Abraham bar Hiyya Hanasi došao je na sljedeću ideju određivanja površine kruga. Unutrašnjost kruga opisao je kao uniju manjih kružnica koje je moguće odmotati i presložiti u jednakokračni trokut kao na Slici 18. Osnovica tog trokuta jednaka je opsegu kružnice koja omeđuje početni krug, odnosno $2r\pi$, a visina na osnovicu jednaka je radijusu kruga, r. Koristeći formulu za površinu trokuta dobivamo:

$$P = \frac{(2r\pi) \cdot r}{2} = r^2\pi.$$

Uočimo kako početni krug i dobiveni trokut imaju jednaku površinu jer nismo ništa dodali niti oduzeli, već samo "presložili".

2.9 Pitagorin poučak



Slika 19: Pitagorin poučak na *egipatskom* trokutu

Pitagorin poučak je, prema mišljenju mnogih, najpoznatija matematička tvrdnja. Svakako predstavlja i jednu od najstarijih matematičkih tvrdnji jer su je poznavali i Babilonci više od tisuću godina prije starih Grka pa stoga možemo reći da ovaj teorem "živi" već četiri tisućljeća. Osim toga, neovisno su ga otkrili i dokazali i drugi narodi kao npr. Kinezi i Indijci.

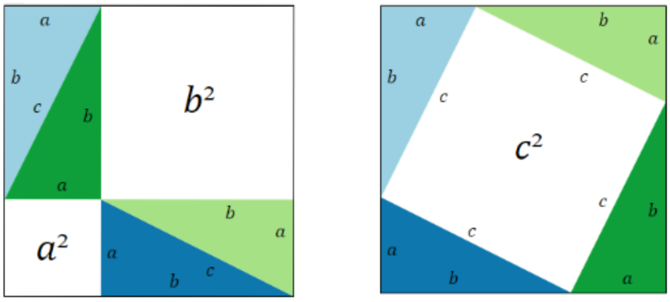
Teorem 2.9.1 (Pitagorin poučak)**.** *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

Ako duljine kateta u pravokutnom trokutu označimo s a i b, a duljinu hipotenuze sa c, onda Teorem 2.9.1 zapisujemo kao jednakost

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Postoji preko tri stotine različitih dokaza Pitagorinog poučka. U onom što slijedi opisat ćemo nekoliko njih.

Prvi način



Slika 20: Preslagivanje trokuta unutar kvadrata

Slika 20 prikazuje dva kvadrata čije su stranice duljine $a + b$. Možemo uočiti kako se oba kvadrata sastoje od četiriju pravokutnih trokuta s katetama duljine a i b te ostatka - bijele površine. Očito je bijela površina lijevog kvadrata jednaka zbroju površina kvadrata sa stranicama duljine a i b. Bijeli lik u desnom kvadratu je kvadrat sa stranicom duljine c jer je kut u svakom od njegovih vrhova pravi (budući da je zbroj kutova uz hipotenuzu jednak 90°). Stoga je $a^2 + b^2 = c^2$.

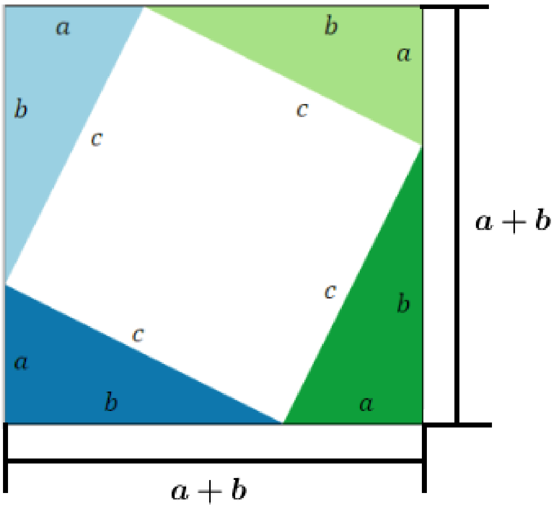
Drugi način

Ideja sljedećeg dokaza slična je kao u prvom načinu s time da ništa ne preslagujemo već površinu zapišemo na dva različita načina. Dakle, kvadrat duljine stranice $a + b$ podijelimo kao na Slici 21. Izjednačimo li površinu velikog kvadrata sa zbrojem površina ucrtanih likova, dobit ćemo redom

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2,$$

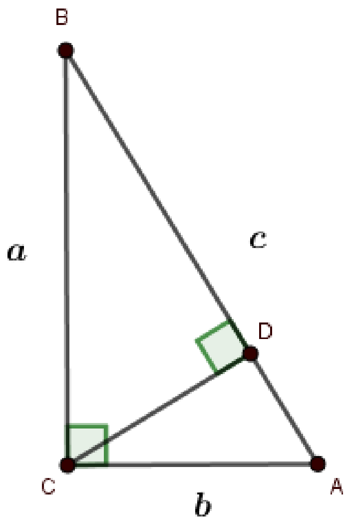
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Slika 21: Pitagorin poučak

Treći način



Slika 22: Pitagorin poučak pomoću sličnosti trokuta

Po K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti ΔABC, ΔBCD i ΔCAD slični pa vrijedi:

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{i} \quad \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

tj.

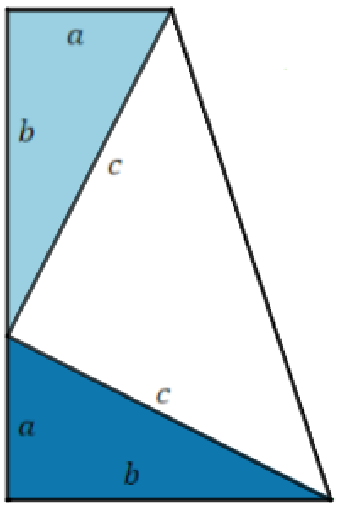
$$|BD| \cdot |AB| = |BC|^2 \quad \text{i} \quad |AD| \cdot |AB| = |AC|^2.$$

Zbrajanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} |BD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |AB| &= |BC|^2 + |AC|^2, \\ |AB| \cdot (|BD| + |AD|) &= |BC|^2 + |AC|^2, \\ |AB|^2 &= |BC|^2 + |AC|^2, \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Četvrti način

Američki predsjednik James A. Garfield (1831.-1881.) Pitagorin je poučak dokazao promatrajući pravokutni trapez kao na Slici 23.



Slika 23: Pitagorin poučak pomoću površine pravokutnog trapeza

Površinu trapeza zapisao je na dva različita načina. S jedne strane koristeći formulu za površinu trapeza a s druge kao zbroj triju pravokutnih trokuta od kojih se prikazani trapez sastoji:

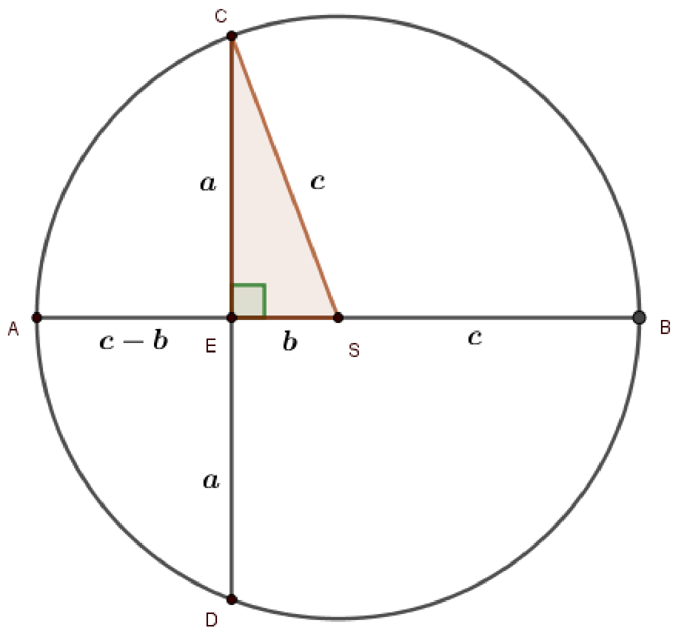
$$\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Lako se vidi da je $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, odnosno $a^2 + b^2 = c^2$.

Peti način

U ovom dokazu Pitagorinog poučka koristit ćemo *Poučak o potenciji točke u odnosu na kružnicu*:

Neka je $\overline{AB}$ neka sekanta kružnice, a T točka koja leži na toj sekanti. Tada je umnožak $|AT| \cdot |BT|$ stalan, tj. ne ovisi o izboru sekante.



Slika 24: Pitagorin poučak pomoću potencije točke

Na Slici 24 dana je kružnica sa središtem u S radijusa c. Sekanta $\overline{CD}$ okomita je na promjer $\overline{AB}$ pa je trokut ΔSCE pravokutan s katetama duljine a, b i hipotenuzom duljine c. Budući da je sekanta $\overline{CD}$ okomita na promjer $\overline{AB}$, vrijedi $|DE| = |CE| = a$. Duljinu dužine $\overline{AE}$ dobit ćemo tako da od duljine polumjera $\overline{AS}$ oduzmemo duljinu dužine $\overline{ES}$, tj. $|AE| = |AS| - |ES| = c - b$.

Primijenimo sada Poučak o potenciji točke E u odnosu na danu kružnicu (promatramo sekante $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$):

$$|CE| \cdot |DE| = |AE| \cdot |BE|,$$

odnosno

$$a \cdot a = (c-b)(b+c),$$

što daje $a^2 + b^2 = c^2$.

Poglavlje 3

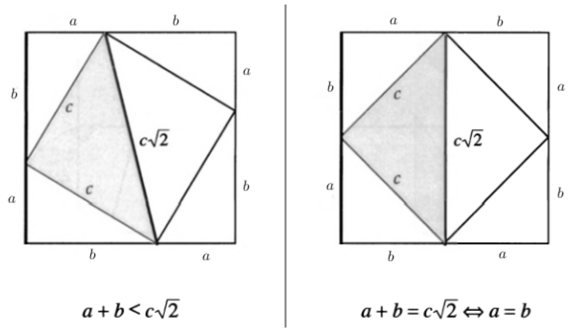
Algebarski izrazi

3.1 Nejednakost pravokutnog trokuta

Neka je c duljina hipotenuze, a a i b duljine kateta pravokutnog trokuta. Tada vrijedi nejednakost:

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

U kvadrat sa stranicom duljine $a + b$ upišemo kvadrat sa stranicom duljine c kao na Slici 25. Duljina dijagonale upisanog kvadrata je $c\sqrt{2}$ pa je ona veća ili jednaka stranici opisanog kvadrata. Jednakost vrijedi ako i samo ako vrhovi upisanog kvadrata padnu u polovišta stranica velikog kvadrata, odnosno ako i samo ako je $a = b$.



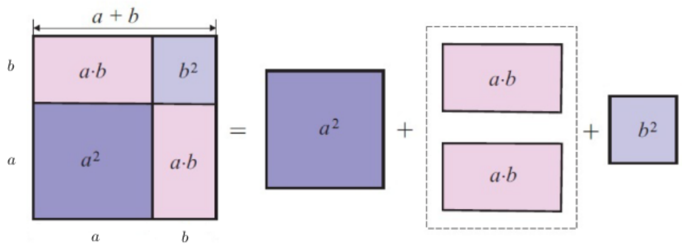
Slika 25: Nejednakost pravokutnog trokuta

3.2 Kvadrat zbroja

Za kvadrat zbroja dvaju brojeva a i b vrijedi

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

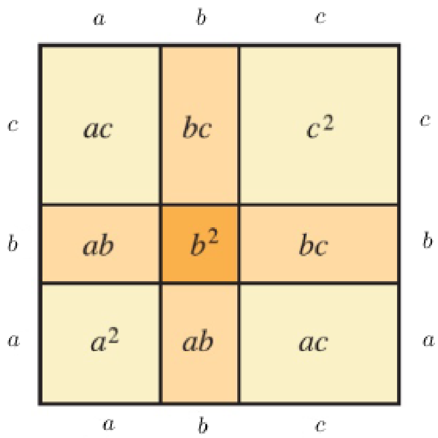
Taj identitet ima i svoje vrlo jednostavno geometrijsko tumačenje prikazano na Slici 26.



Slika 26: Kvadrat zbroja

U kvadrat sa stranicom duljine $a+b$ ucrtamo dva kvadrata sa stranicama duljine a i b, te dva (sukladna) pravokutnika čije su stranice duljine a i b. Stoga je površina velikog kvadrata, $(a+b)^2$, jednaka zbroju površina malih kvadrata, a^2 i b^2, i dvostrukoj površini pravokutnika, $2ab$.

3.3 Kvadrat trinoma



Slika 27: Kvadrat trinoma

Za kvadrat zbroja triju brojeva a, b, c vrijedi $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Taj identitet također ima svoj vizualni prikaz koji nam može olakšati razumijevanje i pamćenje, ali predstavlja i dokaz u slučaju $a, b, c > 0$.

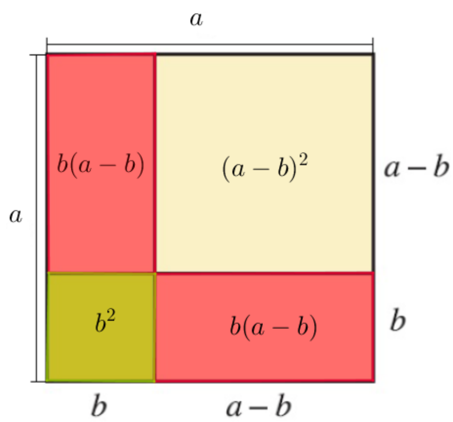
Analogno kao kod vizualizacije kvadrata zbroja, kvadrat sa stranicom duljine $a + b + c$ podijelimo na 9 likova: 3 kvadrata sa stranicama a, b, odnosno c, te 3 para sukladnih pravokutnika sa stranicama duljina a, b, a, c, odnosno b, c. Jednakost slijedi iz jednakosti površina velikog kvadrata i ucrtanih likova.

3.4 Kvadrat razlike

Za kvadrat razlike dvaju brojeva a i b vrijedi

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Geometrijsku interpretaciju ovog identiteta dat ćemo za $a > b > 0$. U kvadrat stranice a ucrtamo dva kvadrata sa stranicama duljine b i $a - b$, te dva pravokutnika sa stranicama duljine b i $a - b$.



Slika 28: Kvadrat razlike

Izjednačimo površinu velikog kvadrata sa zbrojem površina ucrtanih likova i dobivamo

$$a^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2b(a - b).$$

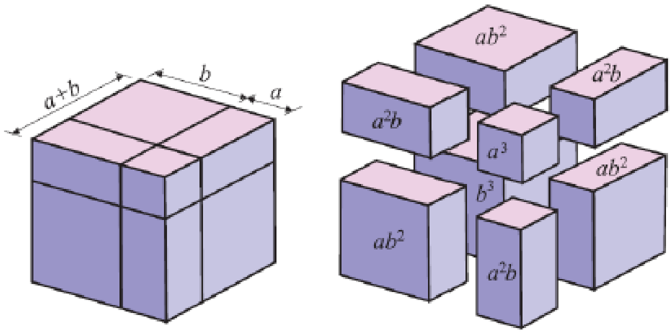
Sa Slike 28 je očito $ab = b(a-b)+b^2$ pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo traženi identitet.

3.5 Kub zbroja

Identitetu za kub zbroja

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

također možemo pridružiti zornu interpretaciju.



Slika 29: Kub zbroja

Duljine geometrijskih tijela koja promatramo vidljive su sa Slike 29. Na slici također vidimo da smo kocku volumena $(a+b)^3$ rastavili na osam manjih tijela: kocku volumena a^3, kocku volumena b^3, tri jednaka kvadra volumena a^2b te tri jednaka kvadra volumena ab^2. Volumen početne kocke jednak je zbroju volumena tijela na koja smo ju razložili što daje traženi identitet.

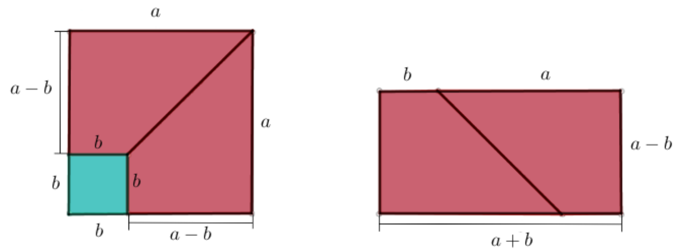
3.6 Razlika kvadrata

Prvi način

Za razliku kvadrata dvaju brojeva a i b vrijedi sljedeće:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Opišimo vizualni prikaz tog identiteta. U kvadrat duljine stranice a, upisan je drugi kvadrat duljine stranice b, kao na Slici 30. Ako od površine velikog kvadrata oduzmemo površinu manjeg, dobit ćemo upravo $a^2 - b^2$. Dijelove koji su nam preostali nakon oduzimanja možemo presložiti u pravokutnik kojemu su duljine stranica $a+b$ i $a-b$, a površina $(a+b)(a-b)$.



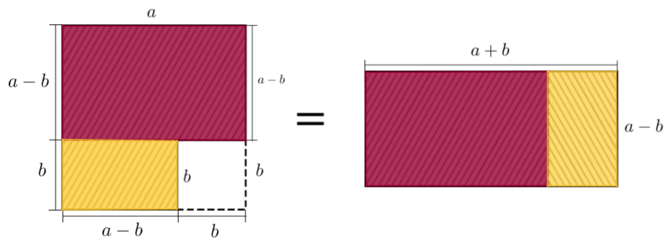
Slika 30: Razlika kvadrata

Drugi način

Identitet

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

možemo vizualno prikazati na još jedan način.



Slika 31: Razlika kvadrata

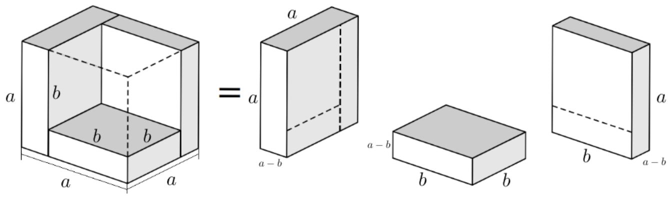
U kvadrat duljine stranice a, ponovno upišemo drugi kvadrat duljine stranice b. Ako od površine velikog kvadrata oduzmemo površinu manjeg, dobit ćemo upravo $a^2 - b^2$. Vidimo da je ideja vizualne interpretacije slična kao u prethodnom primjeru, a razlika je samo u načinu preslagivanja u pravokutnik dijelova koji su preostali nakon oduzimanja.

3.7 Razlika kubova

Identitet za razliku kubova brojeva a i b glasi:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Pogledajmo njegovu geometrijsku interpretaciju.



Slika 32: Razlika kubova

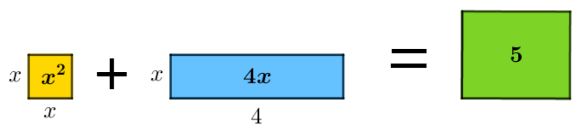
U kocku duljine brida a, upišemo drugu, manju kocku duljine brida b, kao na slici 32. Kada od volumena veće kocke oduzmemo volumen manje, dobit ćemo upravo a^3-b^3. Vidimo da je ideja vizualne interpretacije slična kao u prethodnom primjeru, uz napomenu da kod razlike kvadrata određujemo površine likova, a kod razlike kubova volumene tijela. Promotrimo dijelove koji su nam ostali nakon opisanog oduzimanja te koliko ukupno iznose volumeni tih tijela (desna strana jednakosti). Iz Slike 32 slijedi željeni identitet:

$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= a^2(a-b)+b^2(a-b)+ab(a-b) \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

3.8 Rješavanje kvadratne jednadžbe

Primjer

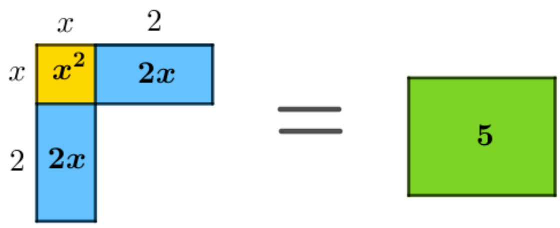
U ovom ćemo primjeru, koristeći tehniku vizualizacije, riješiti kvadratnu jednadžbu $x^2+4x-5=0$. Najprije sa svake strane jednadžbe dodamo 5 kako bismo dobili pogodniji oblik za geometrijsku interpretaciju. Time smo početni zadatak sveli na jednadžbu $x^2+4x=5$ čiji svaki član možemo prikazati pomoću pravokutnika, odnosno kvadrata odgovarajuće površine, kao na Slici 33.



Slika 33: Vizualni prikaz jednadžbe $x^2+4x=5$

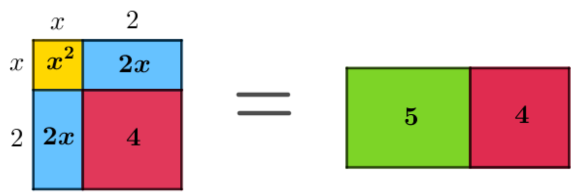
Broj x^2 prikazali smo pomoću površine kvadrata čija je stranica duljine x, a broj $4x$ pomoću pravokutnika stranica duljine 4, odnosno x. Broj 5 dovoljno je pak promatrati kao površinu pravokutnika čije nam duljine stranica nisu važne, bitno je samo da njegova površina iznosi 5.

Plavi pravokutnik zatim podijelimo na dva sukladna pravokutnika tako da im duljine stranica iznose 2 i x te ih presložimo kao na Slici 34.



Slika 34: Presloženi likovi

Lik s lijeve strane nejednakosti, do potpunog kvadrata stranice duljine $x+2$, nadopunimo pomoću kvadrata stranice 2 i površine $2^2 = 4$, kao na Slici 35. Desnoj strani tada također treba dodati lik površine 4 kako bi jednakost i dalje bila zadovoljena. Time smo dobili jednadžbu čiji algebarski zapis glasi $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$.



Slika 35: Nadopuna do potpunog kvadrata

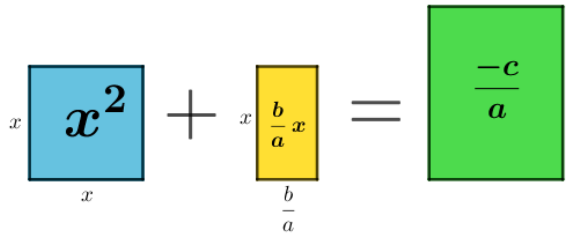
S lijeve strane jednakosti nalazi se, dakle, kvadrat duljine stranice $x + 2$, čija površina $(x + 2)^2$ iznosi koliko i površina lika s desne strane, odnosno $5 + 4 = 9$. Dakle, preostaje riješiti jednadžbu $(x + 2)^2 = 9$. Geometrijski gledano, pitamo se kolika treba biti duljina stranice kvadrata na lijevoj strani kako bi njegova površina iznosila 9. Znamo da je odgovor 3, no također nam je dobro poznato da i broj -3 kvadriran daje 9. Nije moguće konstruirati kvadrat kojemu je stranica duljine -3 pa ćemo rješavanje zadatka dovršiti algebarski:

$$
\begin{gathered}
(x+2)^2 = 9, \\
x_1 + 2 = 3, \quad x_2 + 2 = -3 \\
x_1 = 1, \quad x_2 = -5.
\end{gathered}
$$

Dakle, rješenja početne jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = -5$. Uočimo da smo dobili i jedno rješenje koje ne možemo vizualno interpetirati $x_2 < 0$. Ovo je primjer nepotpune indukcije.

Općenito

Opisanu metodu rješavanja jednadžbe $x^2 + 4x - 5 = 0$ možemo generalizirati na opći oblik koji glasi $ax^2 + bx + c = 0$. Za početak, sa svake strane jednadžbe oduzmemo c čime smo početnu jednadžbu sveli na oblik $ax^2 + bx = -c$. Zatim obje strane podijelimo s a te dobivamo izraz $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$. Možemo primijetiti kako je takav zapis nalik ranije riješenoj jednadžbi $x^2 + 4x = 5$ pa će i postupak rješavanja biti sličan već opisanoj metodi, uz razliku što smo konkretne brojeve zamijenili slovima. Također treba uočiti da je grafički prikaz moguć samo za pozitivne vrijednosti x, $\frac{b}{a}$ te $\frac{-c}{a}$ jer u suprotnom ne bi bilo moguće vizualno prikazati plavi, žuti ni zeleni lik. Dakle, riječ je o nepotpunoj indukciji jer smo navedene vrijednosti ograničili samo na skup pozitivnih brojeva. Nakon što učenicima prezentiramo slikovni prikaz, treba naglasiti da dobivene formule vrijede i za negativne brojeve.

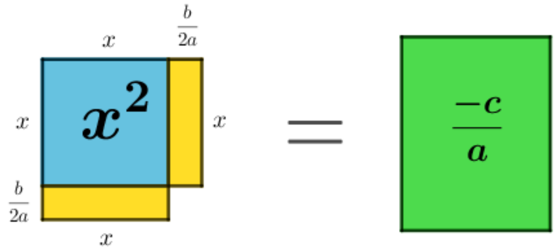


Slika 36: Vizualni prikaz jednadžbe $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$

Broj x^2 prikazali smo pomoću površine kvadrata čija je stranica duljine x, a broj $\frac{b}{a}x$ pomoću površine pravokutnika kojemu su stranice duljine $\frac{b}{a}$, odnosno x. Broj $\frac{-c}{a}$ dovoljno je pak promatrati kao površinu pravokutnika čije nam duljine stranica nisu važne, bitno je samo da njegova površina iznosi $\frac{-c}{a}$. Uočimo kako je ovdje riječ tek o nepotpunoj indukciji jer smo pretpostavili da su brojevi $\frac{b}{a}$ i $\frac{-c}{a}$ pozitivni (u suprotnom vizualni prikaz ne bi bio moguć).

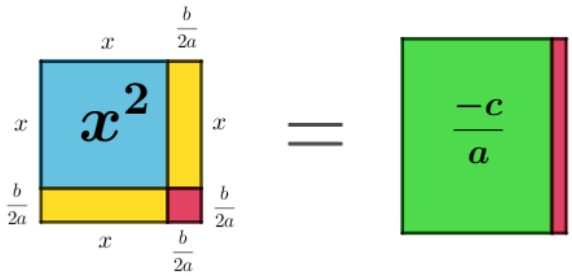
Pravokutnik površine $\frac{b}{a}x$ podijelimo na dva sukladna pravokutnika tako da su im duljine stranica $\frac{b}{2a}$ i x te ih presložimo kako je prikazano na Slici 37.

Lik s lijeve strane nejednakosti, do potpunog kvadrata stranice duljine $x + \frac{b}{2a}$, nadopunimo pomoću kvadrata stranice $\frac{b}{2a}$ i površine $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$, kao na Slici 38. Desnoj strani tada također trebamo dodati lik površine $\frac{b^2}{4a^2}$ kako bi jednakost i dalje



Slika 37: Presloženi likovi

bila zadovoljena. Time smo dobili jednadžbu čiji algebarski zapis glasi $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.



Slika 38: Nadopuna do potpunog kvadrata

S lijeve strane jednakosti nalazi se, dakle, kvadrat duljine stranice $x + \frac{b}{2a}$, čija površina $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ iznosi koliko i površina lika s desne strane, odnosno $\frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Dakle, preostaje riješiti jednadžbu $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Uz analogno objašnjenje kao u prethodnom primjeru, rješavanje zadatka dovršiti ćemo algebarski:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2},\\ x_{1,2} + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},\\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\end{aligned}$$

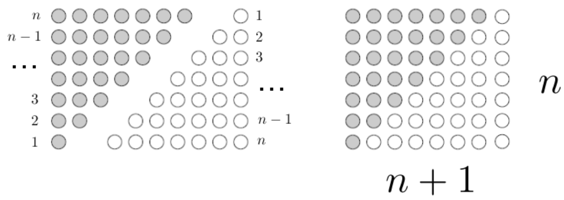
Ovime smo dobili općeniti zapis rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Poglavlje 4

Sume

4.1 Suma prvih n prirodnih brojeva

Metoda vizualizacije može nam pomoći i prilikom određivanja formule za sumu prvih n prirodnih brojeva.



Slika 39: Suma prvih n prirodnih brojeva

Neka jedan kružić predstavlja broj jedan, dva kružića broj dva, ..., a n kružića broj n. Tada zbroj prvih n prirodnih brojeva $1+2+...+n$ možemo predočiti u obliku pravokutnog trokuta s katetama duljine n sastavljenog od bijelih kružića, kao na Slici 39. Zatim na njega nalijepimo sukladan trokut sastavljen od sivih kružića. Uočimo da novonastali lik ima ukupno n redova te da u prvom redu imamo $n+1$ kružića, u drugom redu $(n-1)+2=n+1$ kružića, u trećem redu ponovno $(n-2)+3=n+1$ kružića, a u n-tom redu također $n+1$ kružića. Dakle, spajanjem sivog i bijelog trokuta, dobili smo pravokutnik kojemu su stranice duljine n i $n+1$ kružića pa lako izračunamo da se taj pravokutnik sastoji od ukupno $n(n+1)$ kružića. Znamo da je broj kružića u bijelom i sivom trokutu jednak iz čega slijedi kako je broj kružića u bijelom trokutu duplo manji od broja kružića u pravokutniku, odnosno $\frac{n(n+1)}{2}$. Budući da je pravokutni trokut sastavljen od bijelih kružića predstavljao zbroj prvih

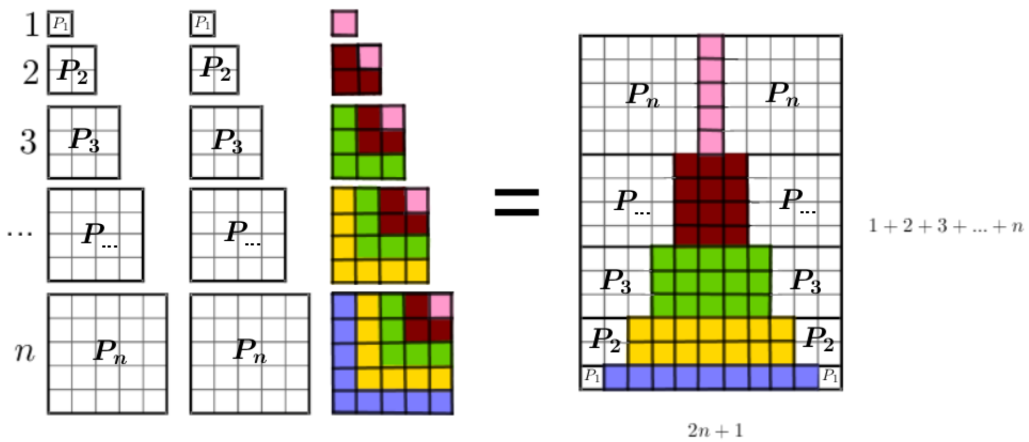
n prirodnih brojeva, zaključujemo kako tražena suma iznosi:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Razmještaj od $1 + 2 + ... + n$ kružića u oblik trokuta objašnjava zašto sumu $1 + 2 + ... + n$ nazivamo n-ti *trokutasti broj*.

4.2 Suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva

Kvadrat broja x geometrijski interpretiramo kao površinu kvadrata sa stranicom duljine $|x|$. Tako ćemo, pri vizualizaciji sume $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, koristiti kvadrate čije su stranice duljina $1, 2, 3, ..., n$ jediničnih dužina, a površine redom $1, 4, 9, ..., n^2$ jediničnih kvadratića, kao na Slici 40.



Slika 40: Suma prvih n kvadrata prirodnih brojeva

S lijeve smo strane jednakosti tri puta vizualno prikazali sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva. Jedinične kvadratiće s lijeve strane presložimo u pravokutnik prikazan na desnoj strani jednakosti kojemu su stranice duljine $2n + 1$ i $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pa znamo da je njegova površina $(2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ jediničnih kvadratića. Broj kvadratića s lijeve i desne strane jednakosti je isti pa vrijedi:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (2n + 1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad / : 3$$

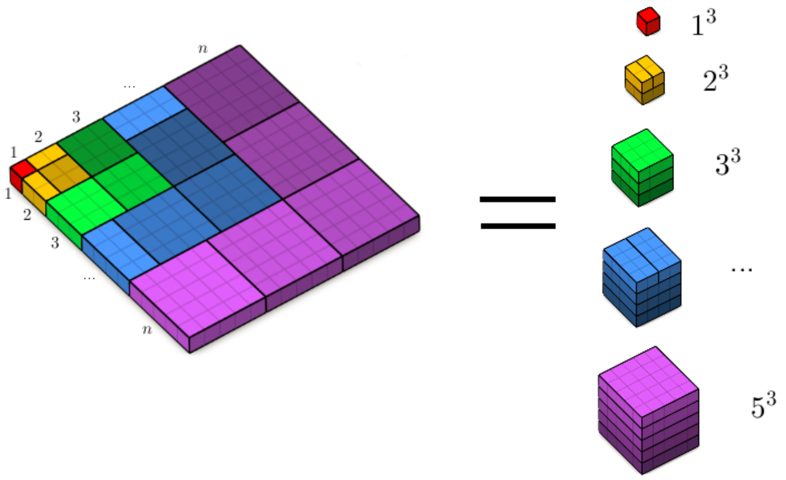
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.3 Kvadrat sume prvih n prirodnih brojeva

Pri dokazu jednakosti

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \tag{4.1}$$

ponovno ćemo koristiti činjenicu da broj x^2 geometrijski prikazujemo kao površinu kvadrata sa stranicom duljine x, dok x^3 možemo shvatiti kao volumen kocke duljine brida x za $x > 0$.



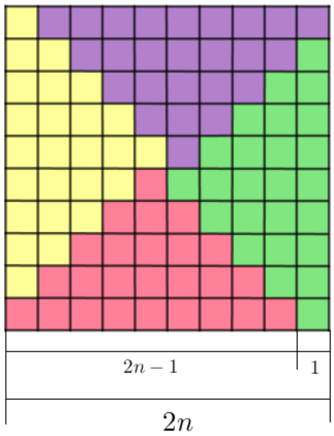
Slika 41: Kvadrat sume prvih n prirodnih brojeva

S lijeve strane jednakosti nalazi se kvadrat čija je stranica duljine $1+2+3+\cdots+n$ jediničnih dužina. Uočimo da smo taj kvadrat podijelili na manje dijelove, kao na Slici 41. Jedinične kvadratiće s lijeve strane presložimo u kocke (prikazane na desnoj strani) duljina bridova $1, 2, \ldots, n$ jediničnih dužina čiji su volumeni redom $1^3, 2^3, \ldots, n^3$ jediničnih kvadratića. Budući da smo desnu stranu dobili čistim preslagivanjem dijelova s lijeve strane, vrijedi jednakost (4.1).

4.4 Suma prvih n neparnih prirodnih brojeva

Prvi način

Već smo spomenuli kako brojeve možemo prikazati na razne načine. Na Slici 42 prikazali smo ih pomoću jediničnih kvadratića pa tako za broj jedan imamo jedan kvadratić, broj tri predstavljaju tri kvadratića, itd.

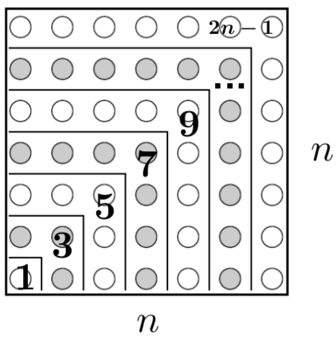


Slika 42: Suma prvih n neparnih prirodnih brojeva - 1. način

Suma prvih n neparnih prirodnih brojeva $1+3+\cdots+(2n-1)$ prikazana je pomoću ružičastog "trokuta" sastavljenog od $1+3+\cdots+(2n-1)$ jediničnih kvadratića. Nadopunimo taj "trokut" s trima sukladnim "trokutima", kao što je prikazano na Slici 42. Dobili smo kvadrat čija je stranica duljine $(2n-1)+1 = 2n$ jediničnih kvadratića. Ružičasti trokut, koji simbolizira sumu prvih n neparnih brojeva, čini četvrtinu dobivenog kvadrata pa vrijedi da je broj jediničnih kvadratića od kojih je sastavljen taj trokut četiri puta manji od broja jediničnih kvadratića u kvadratu, odnosno:

$$1+3+\cdots+(2n-1) = \frac{1}{4}\cdot(2n)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4n^2 = n^2.$$

Drugi način



Slika 43: Suma prvih n neparnih prirodnih brojeva - drugi način

Na Slici 43 brojeve smo prikazali pomoću kružića pa tako za broj jedan imamo jedan kružić, broj tri predstavljaju tri kružića, itd. Kružiće slažemo na način prikazan na Slici 43 čime dobivamo kvadratnu "matricu" reda n. Broj elementata kvadratne matrice reda n je n^2. Time smo pokazali da vrijedi: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Treći način

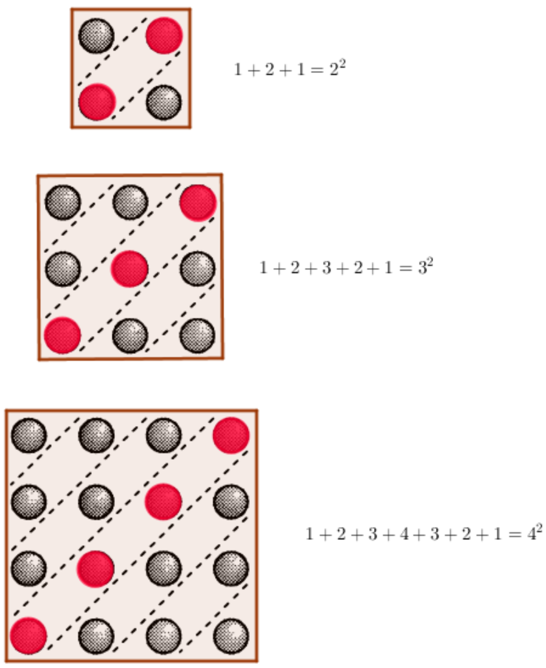
Uočimo da se svaki neparan broj može zapisati kao zbroj dva susjedna prirodna broje, $2k + 1 = k + k + 1$. Stoga je

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = 1+(2+1)+(3+2)+\cdots+(n-1+n-2)+(n+n-1),$$

odnosno

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1.$$

Sume oblika $1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1$ vizualiziramo pomoću



Slika 44: Suma $1 + 2 + ... + (n - 1) + n + (n - 1) + ... + 2 + 1$

kružića posloženih u kvadratne matrice čija je dijagonala duljine n kao na Slici 44. Zaključujemo da je $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1 = n^2$ što je i trebalo pokazati.

4.5 Suma kvadrata Fibonaccijevih brojeva

Fibonaccijev niz, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, je jedan od najpoznatijih nizova u matematici koji se može naći posvuda (priroda, umjetnost, arhitektura). Konstruira se prema jednostavnom pravilu da je svaki član niza, osim početna prva dva, jednak zbroju prethodna dva člana. Stoga on spada u tzv. rekurzivne nizove.

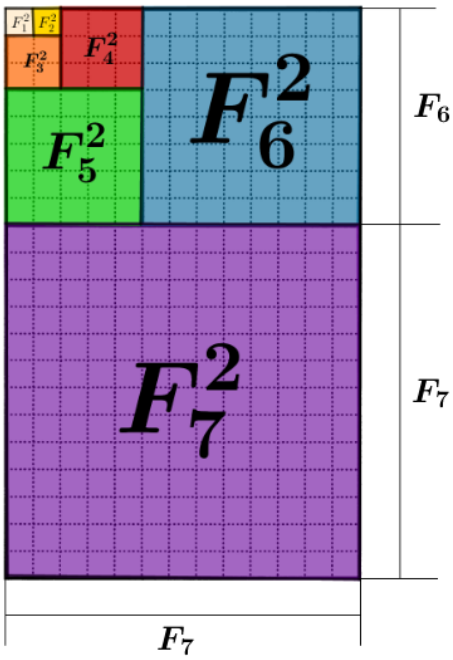
Definicija 4.5.1. *Niz (F_n) zadan početnim vrijednostima $F_1 = F_2 = 1$ te rekurzivnom formulom*

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1},$$

za sve $n \geq 1$ naziva se Fibonaccijev niz. *Opći član niza (F_n) još zovemo n-ti* Fibonaccijev broj.

Želimo pokazati da za članove ovog niza vrijedi sljedeća jednakost:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}. \tag{4.2}$$



Slika 45: Suma kvadrata Fibonaccijevih brojeva

Brojeve smo ponovno prikazali pomoću jediničnih kvadratića pa tada izraze F_1^2, F_2^2, $F_3^2, \ldots$ možemo promatrati kao površine kvadrata sa stranicama redom duljine

$F_1, F_2, F_3, \ldots$ Kvadratiće slažemo kao na Slici 45. Upravo zato što je svaki član niza jednak sumi dvaju prethodnika, duljina stranice pojedinog kvadrata bit će jednaka zbroju duljina stranica dvaju prethodnih članova.

Na Slici 45 prikazana je suma kvadrata prvih sedam članova niza. Vidimo da ih možemo složiti tako da čine kvadrat čije su stranice duljina F_7 te $F_6 + F_7$. Iz definicije Fibonaccijevog niza znamo da vrijedi $F_6 + F_7 = F_8$. Induktivnim zaključivanjem, dobivamo da će stranice svakog pravokutnika dobivenog na promatrani način biti duljina F_n te $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ iz čega slijedi (4.2).

4.6 Geometrijski red

U idućih nekoliko primjera promatrat ćemo geometrijski red pa se, za početak, prisjetimo potrebnih definicije.

Definicija 4.6.1. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Niz $(s_n)_n$ definiran s:*

$$s_1 = a_1,\ s_n = s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,\ n > 1,$$

naziva se niz parcijalnih suma. Red realnih brojeva *je uređeni par niza (a_n) i niza parcijalnih suma $(s_n)_n$, $((a_n), (s_n))$. Za red često rabimo oznaku $\sum a_n$. Element a_n nazivamo* općim članom reda.

Kažemo da je red $\sum a_n$ konvergentan *ako je konvergentan pripadni niz parcijalnih suma, tj. ako postoji $\lim_{n\to\infty} s_n$. Taj limes se zove* suma reda *i označava $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Definicija 4.6.2. *Red $\sum a_n$ je* geometrijski red *ako je (a_n) je geometrijski niz, tj. ako je kvocijent susjednih članova niza stalan (konstantan),*

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$$

Dakle, opći član geometrijskog reda oblika je $a_n = a_1 q^{n-1}$, za $n \in \mathbb{N}$.

Geometrijski red je konvergentan ako je $|q| < 1$ i tada je

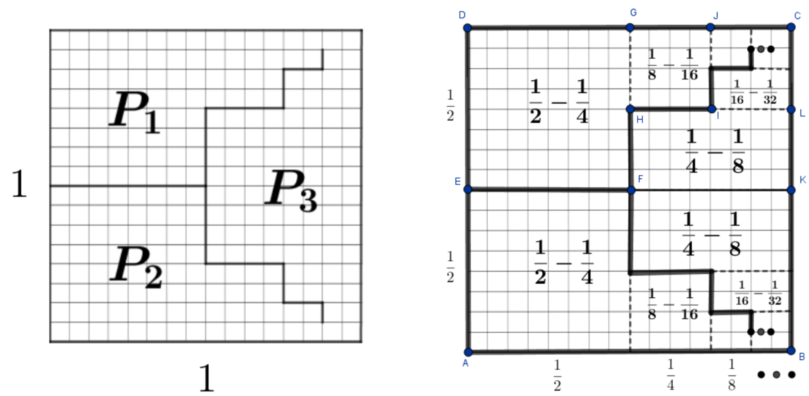
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}. \tag{4.3}$$

Red $\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Red $\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ je geometrijski pri čemu je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = -\frac{1}{2}$. Stoga je prema (4.3)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Na Slici 46 dana je geometrijska interpretacija sume ovog reda. Jedinični kvadrat



Slika 46: Suma reda $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + ...$

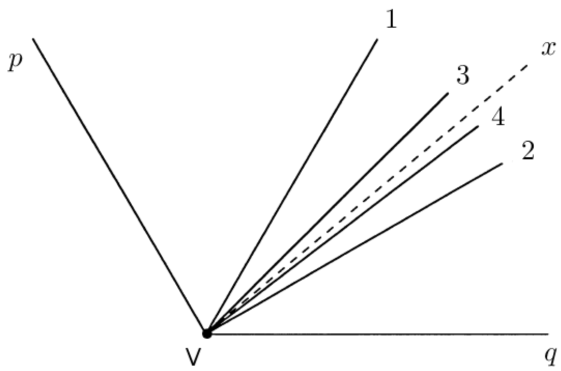
sa slike je zbroj površina tri sukladna lika, $P_1 + P_2 + P_3 = P(ABCD) = 1$. Kako je $P_1 = P_2 = P_3$, imamo da je $P_1 = \frac{1}{3}$. Opišimo kako smo dobili lik površine P_1, odnosno analogno i ostala dva lika. Od polovine početnog kvadrata $ABCD$ (tj. od pravokutnika $DEKC$), oduzeli smo njegovu četvrtinu (tj. kvadrat $GFKC$) te dobili kvadrat $EFGD$, površine $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$. Zatim od polovine kvadrata $GFKC$ (pravokutnik $GHLC$) oduzmemo njegovu četvrtinu (kvadrat $JILC$) te dobijemo kvadrat $GHIJ$ površine $\frac{1}{8} - \frac{1}{16}$. Nastavimo li postupak, zaključujemo da je

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

pa je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}$.

Trisekcija kuta

Trisekcija kuta, uz kvadraturu kruga i duplikaciju kocke, spada pod klasičan problem koji potječe još iz vremena antičke Grčke. Kako i samo ime kaže, tražimo postupak kojim bismo za proizvoljan kut α ravnalom i šestarom, odnosno *euklidskom konstrukcijom*, mogli konstruirati njegovu trećinu. Vremenom se pokazalo da ne postoji rješenje opisanog problem. Na Slici 47 dana je teoretska ideja trisekcije koja nije izvediva u praksi jer je postupak koji ćemo opisati potrebno ponavljati u beskonačnost.



Slika 47: Trisekcija kuta

Pri trisekciji ćemo koristiti rezultat koji smo dobili u prethodnom zadatku:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{3}.$$

Dakle, kut $\measuredangle pVq$ najprije podijelimo na dva jednaka dijela i dobijemo zraku koju označimo brojem 1. Iz konstrukcije, znamo da je kut koji zatvaraju zrake 1 i q dvostruko manji od početnog. Zatim kut između zraka 1 i q podijelimo na dva dijela te dobijemo zraku 2. Zrake 2 i q zatvaraju $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ početnog kuta. Nadalje, kut koji zatvaraju zrake 1 i 2 podijelimo na pola, a dobivenu zraku označimo s 3. Zrake 3 i q zatvaraju kut koji je jednak $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ početnog kuta. Ako opisani postupak ponavljamo do beskonačnosti dobit ćemo da zrake x i q zatvaraju kut koji je jednak $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots$ početnog kuta. Kako znamo da navedena suma iznosi $\frac{1}{3}$, pokazali smo da zrake x i q zatvaraju kut koji je jednak upravo $\frac{1}{3}$ početnog.

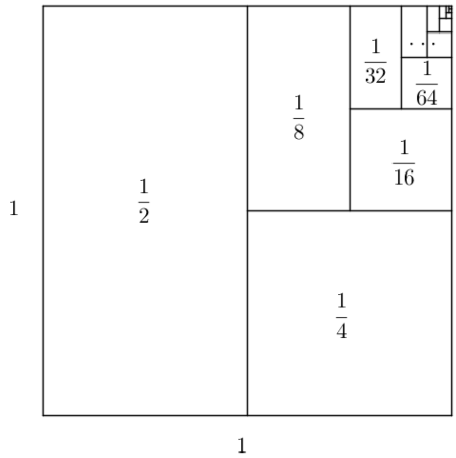
Ova metoda ipak može poslužiti kao *približna* konstrukcija trisekcije kuta jer ćemo nakon konačno mnogo koraka zadanom kutu približno odrediti njegovu trećinu.

Red $\sum \frac{1}{2^n}$

Prema (4.3) je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Opišimo geometrijsku interpretaciju prethodne sume reda danu na Slike 48. Krećemo



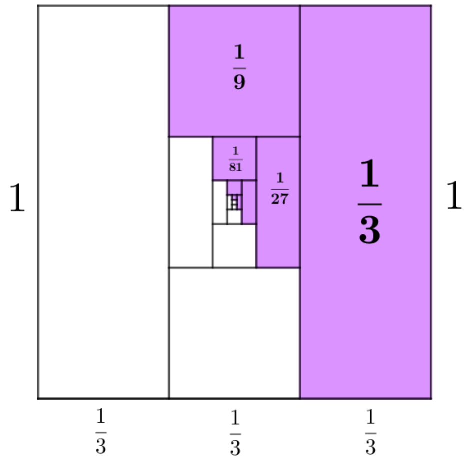
Slika 48: Suma reda $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

od kvadrata duljine stranice 1, odnosno površine 1. Taj kvadrat podijelimo na pola. Zatim jednu njegovu polovicu podijelimo na pola, pa opet jednu“polovicu polovice” podijelimo na pola, itd. Nastavimo li dijeljenje u beskonačnost, zaključujemo da je površinu početnog kvadrata jednaka zbroju površina pravokutnika čije su površine redom $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,...

Red $\sum \frac{1}{3^n}$

Ideja za vizualiciju ovog reda vrlo je slična kao u prethodnom slučaju. Dakle, ponovno krećemo od kvadrata duljine stranice 1 (Slika 4.6). Dijelimo ga na tri jednaka dijela. Jednu trećinu obojamo (ljubičasta), a jednu trećinu od preostale dvije opet dijelimo na tri dijela. Od tri dobivene devetine, jednu obojamo, a jednu nastavimo dalje dijeliti na tri dijela. Tako nastavljajući postupak u beskonačnost kvadrat je podijeljen na dva sukladna lika, ljubičasti i bijeli. Stoga je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{2},$$

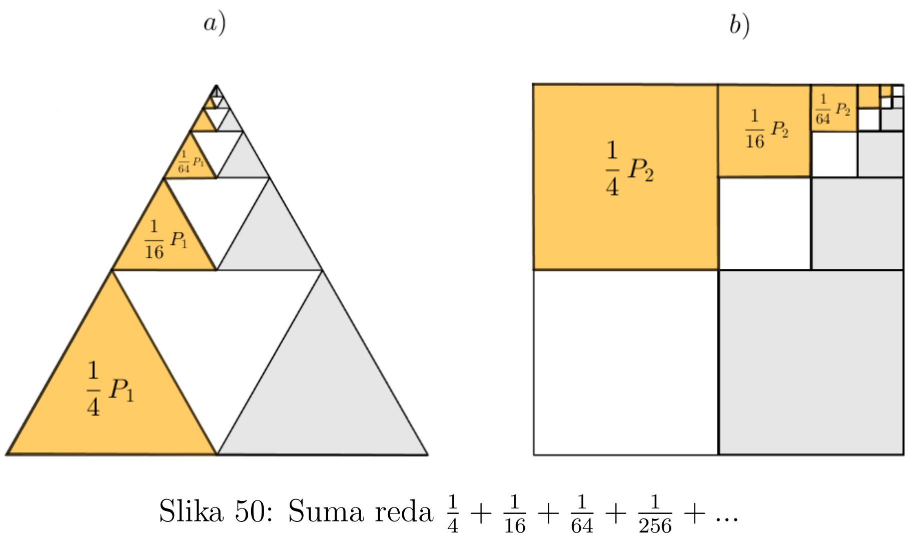


Slika 49: Suma reda $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

što bismo dobili i prema (4.3).

Red $\sum \frac{1}{4^n}$

Na Slici 50 dane su dvije vizualizacije reda $\sum \frac{1}{4^n}$. Slika 50a) prikazuje jednakos-



Slika 50: Suma reda $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots$

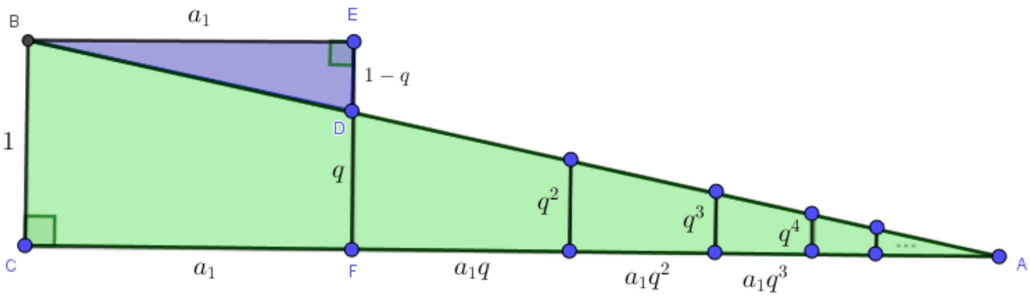
traničan trokut stranice jednične duljine koji uzastopno dijelimo na četiri sukladna trokuta, a na 50b) kvadrat dijelimo na četiri sukladna kvadrata, itd. U oba slučaja

$$\frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{16}P_1 + \frac{1}{64}P_1 + \frac{1}{256}P_1 + \cdots = \frac{1}{3}P_1$$
$$P_1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots\right) = \frac{1}{3}P_1,$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Red $\sum q^n$



Slika 51: Duljina katete $\overline{CA}$ kao geometrijski red

Neka je $a_1 > 0$ i $0 < q_1 < 1$. Opišimo vizualizaciju sume reda $a_1\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ koja je prikazana na Slici 51. Krenimo od pravokutnika $CFEB$ sa stranicama duljine $|CF| = a_1$ i $|CB| = 1$. Neka je D točka na stranici $\overline{FE}$ koja tu stranicu dijeli u omjeru $q : (1-q)$. Pravac BD siječe pravac CF u točki A. Kako je $\measuredangle EBD = \measuredangle CAB$, a kako je i $\measuredangle BCA = \measuredangle DEB = 90°$, po K-K poučku o sličnosti trokuta zaključujemo da su trokuti ΔABC i ΔBDE slični. Stoga je

$$\frac{|CA|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|ED|},$$

odnosno

$$|CA| = \frac{a_1}{1-q}.$$

S druge strane ΔABC dijelimo na slične trapeze tako da je koeficijent sličnosti svaka dva susjedna trapeza jednak q a čije su duljine stranica vidljive sa Slike 51. Stoga je

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Poglavlje 5

Trigonometrijski identiteti

U ovom poglavlju ćemo neke trigonometrijske identitete vizualno interpretirati pomoću trigonometrijske kružnice te kasnije pomoću *trigonometrije pravokutnog trokuta*. Prisjetimo se, u pravokutnom trokutu vrijedi:

$$\begin{aligned}
\textit{sinus šiljastog kuta} &= \frac{\textit{nasuprotna kateta}}{\textit{hipotenuza}}, \\
\textit{kosinus šiljastog kuta} &= \frac{\textit{priležeća kateta}}{\textit{hipotenuza}}, \\
\textit{tangens šiljastog kuta} &= \frac{\textit{nasuprotna kateta}}{\textit{priležeća kateta}}, \\
\textit{kotangens šiljastog kuta} &= \frac{\textit{priležeća kateta}}{\textit{nasuprotna kateta}}.
\end{aligned}$$

5.1 Kosinus razlike

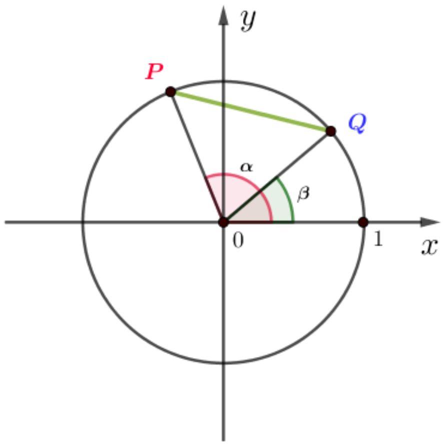
Sljedeća vizualizacija odnosi se na identitet za kosinus razlike. Podsjećamo da udaljenost točaka $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ s koordinatama u pravokutnom koordinatnom sustavu računamo pomoću formule

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

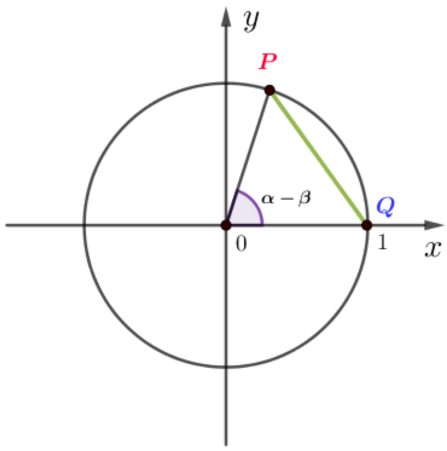
Uz oznake kao na Slici 52 je $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q = (\cos\beta, \sin\beta)$. Stoga za udaljenost $d = d(P, Q)$ vrijedi:

$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta.$$

Zatim točke P i Q zarotiramo oko ishodišta za kut β u smjeru kazaljke na satu, kako bi točka Q "pala" upravo na x-os, kao na Slici 53. Nakon rotacije ne mijenjamo



Slika 52: Kosinus razlike



Slika 53: Kosinus razlike

nazive točaka. Rotacijom se kut između pravaca OP i OQ nije promijenio te i dalje iznosi $\beta - \alpha$, kao ni udaljenost među rotiranim točkama. Stoga je

$$d^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta))^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Dakle,

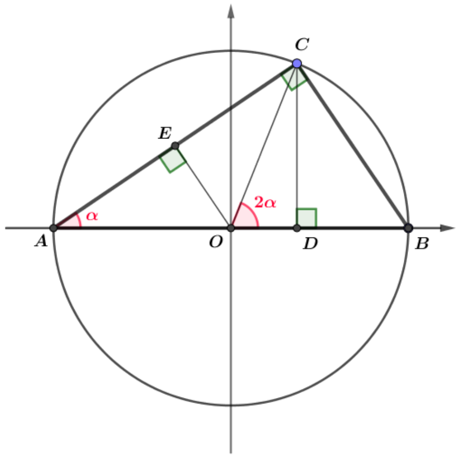
$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta,$$

odnosno

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

5.2 Sinus i kosinus dvostrukog kuta

Identitet za sinus, odnosno kosinus dvostrukog kuta dokazat ćemo pomoću jedinične kružnice u koju je upisan ΔABC, kao na Slici 54.



Slika 54: Sinus i kosinus dvostrukog kuta

Označimo s α kut pri vrhu A. Uočimo da je tada $\measuredangle COB$ njemu pripadni središnji kut pa vrijedi $\measuredangle COB = 2\alpha$. Kako dužina $\overline{OC}$ s x-osi zatvara kut 2α, a točka C nalazi se na jediničnoj kružnici, zaključujemo da su njezine koordinate $C = (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$. Nadalje, $\overline{AB}$ je promjer kružnice, a C točka na kružnici pa prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom slijedi da je kut $\measuredangle BCA$ pravi. Promotrimo kutove trokuta ΔABC i ΔADC. U oba trokuta veličina jednog kuta iznosi α, a drugi kut je pravi pa prema K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi $\Delta ABC \sim \Delta ADC$. Tada je

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|},$$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Odredimo duljine dužina $\overline{CD}, \overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ te $\overline{AD}$. Točka D leži na osi x, a točka C ima koordinate $C = (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$ pa lako vidimo da je

$$|CD| = \sin(2\alpha).$$

Budući da je $|AO| = |OC|$ (jer su dužine $\overline{AO}$ i $\overline{OC}$ polumjeri kružnice), trokut ΔAOC je jednakokračan pa nožište E visine iz O na $\overline{AC}$ raspolavlja stranicu $\overline{AC}$. Dakle,

$$|AC| = 2\,|AE|\,.$$

Promotrimo pravokutan trokut ΔAOE. Vrijedi $\cos\alpha = \frac{|AE|}{|AO|} = \frac{|AE|}{1} = |AE|$. Prema tome,

$$|AC| = 2\,|AE| = 2\cos\alpha.$$

Dužina $\overline{AB}$ je promjer jedinične kružnice pa je očito

$$|AB| = 2.$$

Iz pravokutnog trokuta ABC dobivamo:

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{2} \Rightarrow |BC| = 2\sin\alpha$$

Preostaje samo još izračunati duljinu dužine $\overline{AD}$. Dužina $\overline{AO}$ je polumjer jedinične kružnice pa je očito $|AO| = 1$. Dužina $\overline{CD}$ okomita je na x-os pa je x koordinata točke D jednaka x koordinati točke C, odnosno $\cos(2\alpha)$. Iz toga slijedi $|OD| = \cos(2\alpha)$. Tada je

$$|AD| = |AO| + |OD| = 1 + \cos(2\alpha).$$

Vratimo se sada omjerima koji su proizašli iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔADC :

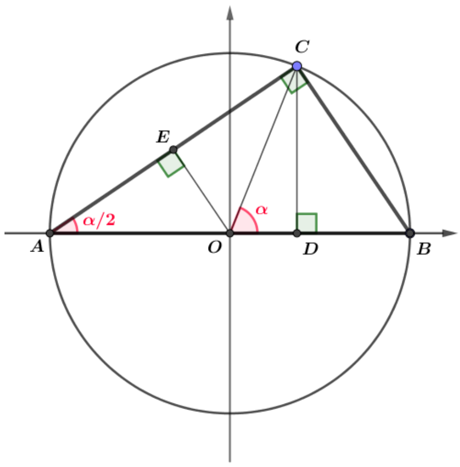
$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{\sin(2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{2} \Rightarrow \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

čime smo došli do jednakosti za sinus dvostrukog kuta. Zatim,

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1+\cos(2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{2} \Rightarrow \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

5.3 Tangens polovičnog kuta

Identitet za tangens polovičnog kuta raspisat ćemo slično kao sinus, odnosno kosinus dvostrukog kuta. Dakle, u jediničnu kružnicu upisan je ΔABC, s tim da sada veličina kuta pri vrhu A ne iznosi α već $\frac{\alpha}{2}$, kao na Slici 55.



Slika 55: Tangens polovičnog kuta

Ako mjera kuta pri vrhu A iznosi $\frac{\alpha}{2}$, uočimo da je tada $\measuredangle COB$ njemu pripadni središnji kut pa vrijedi $\measuredangle COB = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Nadalje, $\overline{AB}$ je promjer kružnice, a C točka na kružnici pa prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom slijedi da je kut $\measuredangle BCA$ pravi.

Kako je zbroj kutova u trokutu 180°, u ΔABC je

$$\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle BCA - \measuredangle CAB = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Promotrimo trokut BCD. Točka D je nožište visine iz C na AB pa je kut pri vrhu D pravi. Za kut pri vrhu B malo prije smo pokazali da je veličine $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Sada lako odredimo i mjeru kuta pri vrhu C:

$$\measuredangle BCD = 180^\circ - \measuredangle CDB - \measuredangle DBC = 180^\circ - 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Odredimo duljine kateta pravokutnih trokuta ADC i BCD. Dužine $\overline{AO}, \overline{OC}$ i $\overline{OB}$ su polumjeri jedinične kružnice pa su njihove dužine 1, tj. $|AO| = |OC| = |OB| = 1$. Promatramo trokut ΔCOD:

$$\sin\alpha = \frac{|CD|}{|OC|} = \frac{|CD|}{1} = |CD| \Rightarrow |CD| = \sin\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OD|}{1} = |OD| \Rightarrow |OD| = \cos\alpha.$$

Preostaje izračunati duljine kateta $\overline{DB}$ i $\overline{AD}$:

$$|DB| = |OB| - |OD| = 1 - \cos\alpha \Rightarrow |DB| = 1 - \cos\alpha,$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = 1 + \cos\alpha \Rightarrow |AD| = 1 + \cos\alpha.$$

Sada imamo sve potrebne veličine za računanje tangensa polovičnog kuta. Jedna će jednakost slijediti iz trokuta ΔADC, a druga iz ΔBCD:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|CD|},$$

odnosno

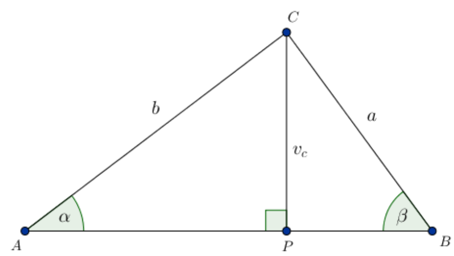
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

5.4 Sinusov poučak

Sinusov poučak u trokutu ABC glasi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dokazat ćemo samo prvu jednakost, a druga se onda pokaže potpuno analogno. Promotrimo Sliku 56.



Slika 56: Sinusov poučak

Točka P je nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ pa su, očito ΔAPC i ΔCPB pravokutni trokuti. Tada je:

$$\sin\beta = \frac{|CP|}{|CB|} = \frac{v_c}{a} \Rightarrow v_c = a \cdot \sin\beta,$$

$$\sin\alpha = \frac{|CP|}{|AC|} = \frac{v_c}{b} \Rightarrow v_c = b\cdot\sin\alpha.$$

Za v_c dobili smo dvije vrijednosti pa njihovim izjednačavanjem dobivamo:

$$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha\ ,$$

odnosno

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

5.5 Kosinusov poučak

Kosinusov poučak glasi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dokazat ćemo prvi identitet a ostali su analogni.

Definicija 5.5.1. *Ako unutar kružnice odaberemo neku točku P i njome položimo dvije tetive, AB i CD, tada je:*

$$|AP|\cdot|PB| = |CP|\cdot|PD|\,.$$

Za bilo koji pravac koji prolazi točkom P i siječe kružnicu u točkama A i B, umnožak $|AP|\cdot|PB|$ je stalan broj i zove se potencija točke s obzirom na kružnicu.

Promotrimo Sliku 57. Kružnicu k ima središte u A i polumjer $|AB| = c$. Pravci AB, AC i BC sijeku kružnicu k u sljedećim točkama:

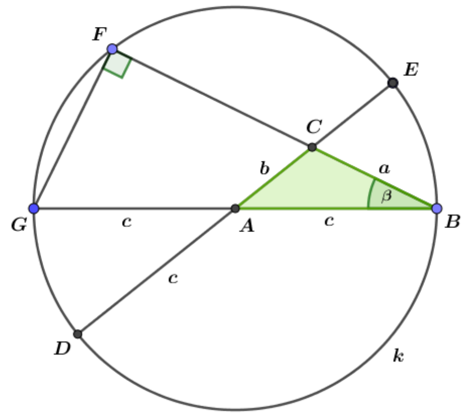
$$AB\cap k = \{G\},\ BC\cap k = \{F\},\ AC\cap k = \{E, D\}.$$

Kako je F točka na kružnici, a $\overline{GB}$ promjer kružnice, po Talesovom teoremu o obodnom kutom nad promjerom slijedi da je kut $\measuredangle BFG$ pravi, a trokut ΔBFG pravokutan. Prema tome vrijedi:

$$\cos\beta = \frac{|FB|}{|GB|} = \frac{|FB|}{2c} \Rightarrow |FB| = 2c\cos\beta.$$

Odredimo još duljine stranica $\overline{FC}, \overline{DC}$ i $\overline{CE}$:

$$|FC| = |FB| - |CB| = 2c\cos\beta - a,$$



Slika 57: Kosinusov poučak

$$|DC| = |DA| - |AC| = c + b,$$
$$|CE| = |AE| - |AC| = c - b.$$

Promotrimo sada potenciju točke C s obzirom na kružnicu k :

$$|FC| \cdot |CB| = |DC| \cdot |CE|,$$
$$(2c\cos\beta - a) \cdot a = (c + b) \cdot (c - b),$$
$$2ac\cos\beta - a^2 = c^2 - b^2.$$

Stoga je $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Poglavlje 6

Nejednakosti i limesi

6.1 Napierova nejednakost

Ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 < a < b$, tada vrijedi sljedeće:

$$\frac{1}{b} < \frac{ln\, b - ln\, a}{b - a} < \frac{1}{a}. \tag{6.1}$$

Relacija (6.1) zove se *Napierova nejednakost*. Prije nego prijeđemo na dokaz, prisjetimo se kako određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ geometrijski predstavlja površinu lika omeđenog grafom funkcije f, x-osi te pravcima $x = a$ i $x = b$.

Neka je $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.Promotrimo Sliku 58. Površina P područja ispod grafa funkcije f veća je od površine pravokutnika $ABEF$, a manja od površine pravokutnika $ABCD$. Odredimo površine tih dvaju pravokutnika. Lako se vidi da je $|AB| = b - a$. Budući da se točka E nalazi na grafu funkcije $y = \frac{1}{x}$, njezine su koordinate $(b, \frac{1}{b})$ pa je $|EB| = \frac{1}{b}$. Slijedi, $P(ABEF) = \frac{1}{b}(b - a)$. Točka D također se nalazi na grafu funkcije $y = \frac{1}{x}$ pa su njezine koordinate $(a, \frac{1}{a})$ i stoga je duljina dužine $\overline{AD}$ jednaka $\frac{1}{a}$. Slijedi, $P(ABCD) = \frac{1}{a}(b - a)$.

Vrijedi niz nejednakosti:

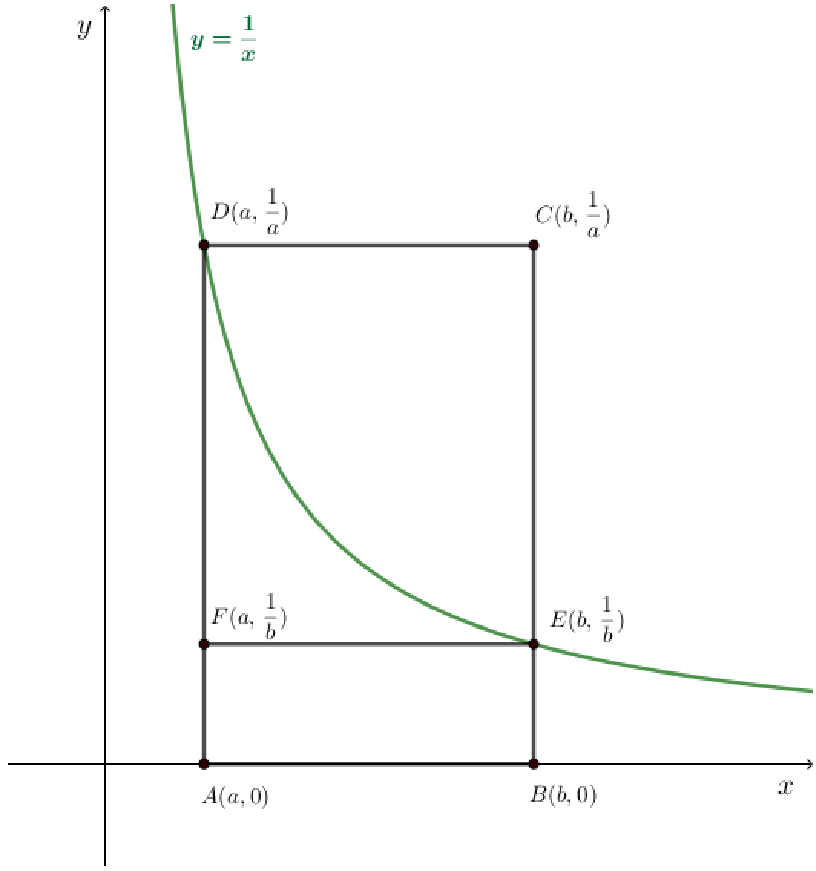
$$P(ABEF) < P < P(ABCD),$$

$$\frac{1}{b}(b - a) < \int_a^b \frac{1}{x}dx < \frac{1}{a}(b - a),$$

$$\frac{1}{b}(b - a) < \ln|x|\Big|_a^b < \frac{1}{a}(b - a),$$

$$\frac{1}{b}(b - a) < \ln b - \ln a < \frac{1}{a}(b - a),$$

a iz posljednje slijedi (6.1).



Slika 58: Napierova nejednakost

6.2 Broj e

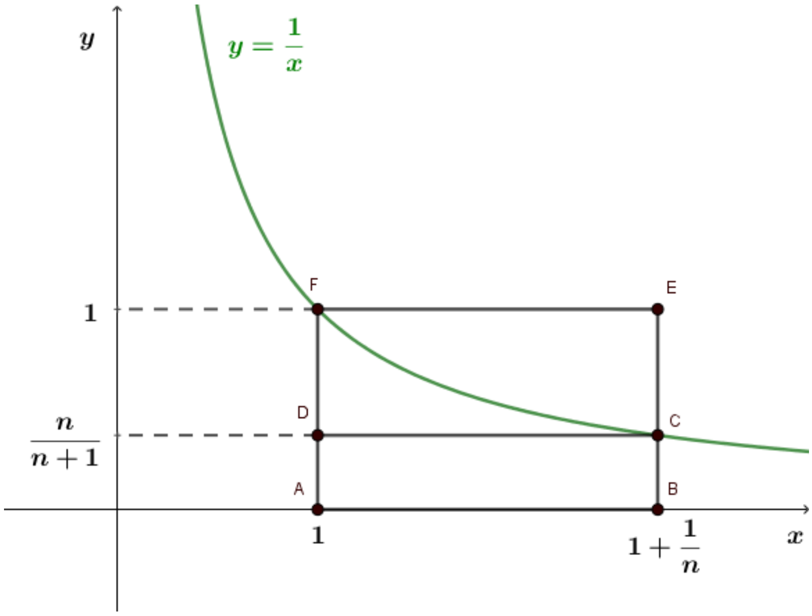
Matematička konstanta e, poznata i kao *Eulerov broj* ili *Napierova konstanta*, baza je prirodnog logaritma, kojeg možemo definirati kao jednistven pozitivan broj za koji je

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pri dokazu navedene jednakosti koristitimo činjenicu da je $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$ za $b > a > 0$.



Slika 59: Usporedba površina

Sa Slike 59 vidimo da je površina P područja ispod grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ veća od površine pravokutnika $ABCD$, a manja od površine pravokutnika $ABEF$. Koordinate točaka lako iščitamo sa slike pa su površine navedenih pravokutnika $\frac{1}{n+1}$ i $\frac{1}{n}$, redom. Stoga vrijedi:

$$P(ABCD) \leq P \leq P(ABEF),$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad / \cdot n$$

$$\frac{n}{n+1} \leq n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n}{n},$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, prema Teoremu o sendviču slijedi da postoji limes niza $(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n)$ i

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1.$$

Zbog neprekidnosti eksponencijalne i logaritamske funkcije je

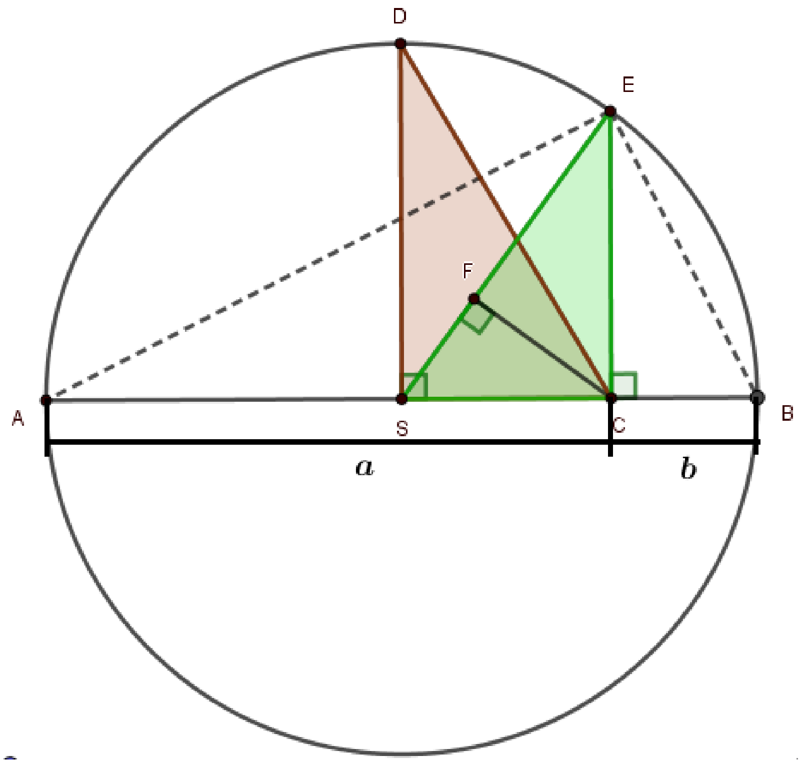
$$e^1 = e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

6.3 Kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina

Naka su $a, b > 0$. Kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina brojeva a i b dane su redom

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{ab},\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Istražimo odnos među njima.



Slika 60: Kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina

Na Slici 60 dana je kružnica sa središtem u S, promjera $a+b$. Budući da je $\overline{DS}$ polumjer kružnice, vrijedi $|DS| = \frac{a+b}{2}$. Dakle, $|DS|$ je aritmetičke sredina brojeva a i b.

Kvadratnu sredinu dobit ćemo primjenom Pitagorinog poučka na ΔSCD, $|CD|^2 = |DS|^2 + |CS|^2$. Stoga je

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Za geometrijsku sredinu, promotrimo trokut ΔABE. Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice, kut BEA je pravi što povlači da je i trokut ABE pravokutan. Nadalje, iz Euklidovog teorema poznato je da je duljina visine pravokutnog trokuta jednaka geometrijskoj sredini duljina dužina na koje nožište visine dijeli hipotenuzu. Slijedi:

$$|EC| = \sqrt{|AC| \cdot |BC|} = \sqrt{ab}$$

Još preostaje izraziti harmonijsku sredinu pri čemu ćemo promatrati ΔSCE i ΔFCE. Budući da su oba trokuta pravokutna i imaju zajednički kut pri vrhu E, po $K - K$ poučku o sličnosti, dobivamo da je $\Delta SCE \sim \Delta FCE$. Tada vrijedi:

$$\frac{|EF|}{|CE|} = \frac{|CE|}{|ES|},$$

odnosno

$$|EF| = \frac{|CE|^2}{|SE|} = \frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Sa Slike 60 je

$$|CD| \geq |DS| \geq |CE| \geq |EF|,$$

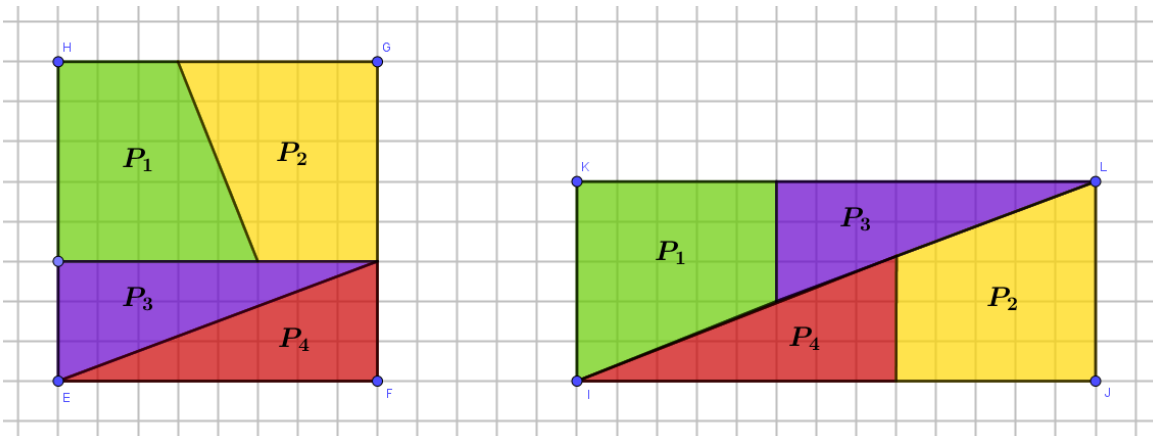
odnosno vrijedi tzv. KAGH-nejednakost

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Poglavlje 7

Vizualna varka

7.1 $64 = 65$



Slika 61: $64 = 65$

Već je spomenuto kako vizualni dokaz ne možemo smatrati pravim dokazom jer slika nije uvijek potpuno precizna. Za kraj je dan primjer u kojem nas slika navodi na jednakost $64 = 65$. Promatramo kvadrat duljine stranice 8 koji je podijeljen kao na Slici 61. Njegove dijelove presložimo zatim u pravokutnik čije su duljine stranica 13 i 5. Kako nismo ništa dodavali niti oduzimali već samo presložili, logično je pretpostaviti da su površine kvadrata i pravokutnika jednake:

$$P(ABCD) = P(IJKL),$$
$$8^2 = 13 \cdot 5,$$
$$64 = 65.$$

Kako je $64 \neq 65$ očito nas je vizualizacija navela na pogrešan trag. Pokažimo u čemu je greška. Izrazimo duljinu dijagonale pravokutnika sa Slike 61 na dva načina: kao sumu duljine duljeg kraka zelenog trapeza i hipotenuze ljubičastog pravokutnog trokuta te kao hipotenuzu pravokutnog trokuta kojeg čine crveni trokut i žuti trapez.

Označimo s d_1 duljinu dužeg kraka zelenog trapeza. Tada je

$$d_1 = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5.3852.$$

Neka d_2 predstavlja duljinu hipotenuze ljubičastog trokuta. Tada je

$$d_2 = \sqrt{3^2 + 8^2} \approx 8.544.$$

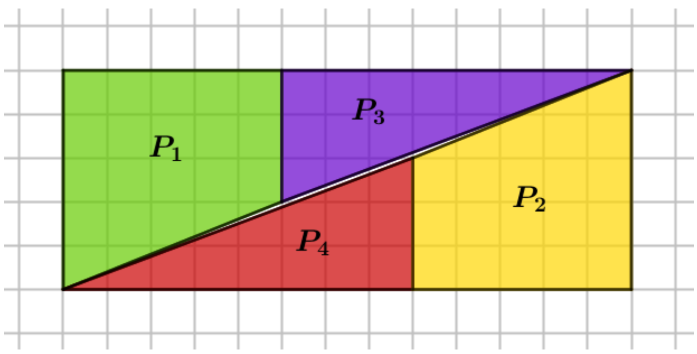
S druge strane, spomenuli smo da je dijagonala pravokutnika ujedno i hipotenuza pravokutnog trokuta sa stranicama duljina 5 i 13 pa njezina duljina d_3 iznosi:

$$d_3 = \sqrt{5^2 + 13^2} \approx 13.9284$$

Duljina dijagonale trebala bi biti ista nevezano o načinu na koji je računamo:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &\stackrel{?}{=} d_3, \\ 5.3852 + 8.544 &\stackrel{?}{=} 13.9284, \\ 13.9292 &\neq 13.9284. \end{aligned}$$

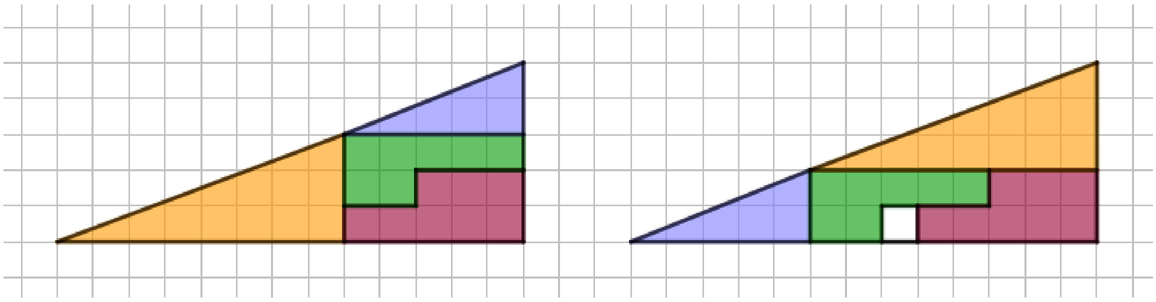
Očito je $d_1 + d_2 > d_3$, odnosno promatrane stranice zelenog trapeza, ljubičastog trokuta i dijagonala pravokutnika zadovoljavaju nejednakost trokuta pa tri navedene stranice čine trokut. Kako su zeleni i žuti trapez sukladni, kao i crveni i ljubičasti trokut, zaključujemo da se unutar velikog pravokutnika nalazi praznina u obliku trapeza, što je prikazano na Slici 62 te njegova površina iznosi $65 - 64 = 1$.



Slika 62: Praznina površine 1

7.2 Zagonetka nestalog kvadratića

Ova vizualna varka, kao i slagalice sličnog tipa poznate su još od 16. stoljeća. Na Slici 63 prikazana su dva pravokutna trokuta čije su katete duljine 5 i 13. Budući da su katete jednake, slijedilo bi da su i površine dvaju likova jednake. No uočimo da preslagivanjem dijelova lijevog trokuta dobijemo desni koji u sebi sadrži prazninu, odnosno bijeli kvadratić. Varka je u tome što lijevi lik samo izgleda kao trokut, no zapravo nije. Naime, duljine kateta žutog trokuta odnose se kao 3 : 8, dok su "katete" velikog "trokuta" u omjeru 5 : 13. Ono što se kod lijevog lika čini kao hipotenuza, u stvarnosti nije ravna linija.



Slika 63: Zagonetka nestalog kvadratića

Bibliografija

[1] C. Alsina, R. B. Nelsen, *Math made visual*, MAA, Washington, 2016.

[2] A. Čižmešija, D. Marić, *Dokaz bez riječi kao metoda uvođenja dokaza u nastavu matematike*, Zagreb

[3] B. Dakić, *Matematika u boji*, Element, Zagreb, 2018.

[4] R. B. Nelsen, *Proofs without words II*, MAA, Washington, 2000.

[5] M. Petrač, *Matematički dokaz*, Osječki matematički list, Vol. 14 No. 2, 2014.

[6] G. Schierscher, *Volim matematiku*, Večernji list, 2014.

[7] M. Tomašević, *Dokazi bez riječi, diplomski rad*, Osijek, 2015.

[8] M. H. Weissman, *An Illustrated Theory of Numbers*, AMS, 2017.

[9] Area of a circle, dostupno na `https://www.mathteacherctk.com/blog/2011/02/16/area-of-a-circle/` (siječanj 2019.)

[10] J. Jakšetić, Dokazi bez riječi, dostupno na `https://www.fsb.unizg.hr/usb_frontend/files/1404386029-0-dokazibezrijeci.pdf` (siječanj 2019.)

[11] Double angle formulas for sine and cosine, dostupno na `https://math.stackexchange.com/questions/136774/using-the-unit-circle-to-prove-the-double-angle-formulas-for-sine-and-cosine` (siječanj 2019.)

[12] Modular Arithmetic, dostupno na `https://www.ias.edu/ideas/2012/taylor-modular-arithmetic` (svibanj 2019.)

[13] Nicomachus theorem 3D, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/File:Nicomachus_theorem_3D.svg` (siječanj 2019.)

[14] Proof without words, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_without_words (siječanj 2019.)

[15] B. Polster, M. Ross, Proofs without words, dostupno na http://www.qedcat.com/misc/207.html (siječanj 2019.)

[16] The Butterfly Method for Fractions, dostupno na https://www.teacherspayteachers.com/Product/The-Butterfly-Method-for-Fractions-with-Journal-Cutouts-and-Worksheets-1911344 (svibanj 2019.)

[17] P. Talwalkar, The Quadratic Formula – An Intuitive Explanation, dostupno na https://mindyourdecisions.com/blog/2015/10/02/the-quadratic-formula-an-intuitive-explanation/ (veljača 2019.)

Sažetak

Kreativna vizualizacija, odnosno sposobnost stvaranja mentalnih slika, jedan je od važnih alata koji pomažu razumijevanju matematičkih ideja, koncepata i dokaza (tzv. "dokazi bez riječi" ili "grafički dokazi"). Jednostavan, elegantan i slikovit prikaz dokaza, posebno je pogodan radi zornosti i reduciranog teksta. Ipak, vizualni dokazi kriju u sebi zamku ukoliko im se ne pristupi kritički te nikako ne mogu zamijeniti dokaz u klasičnom smislu. Kako slikom prikazujemo brojeve veće od nule, u nekim dokazima radi se tek o nepotpunoj indukciji. Stoga, kako bi se izbjegli pogrešni zaključci, svaka vizualizacija treba biti popraćena logičkim objašnjenjem i smislenim dokazom.

Summary

This work presents different visualizations that are interesting from both mathematical and pedagogical point of view. The ability to create mental images are important tool that can make understanding mathematical ideas and concepts much easier. More elegant than formal math, graphic proofs offer colorful pictures and diagrams, especially convenient for students who are not very into an abstract math. Despite the positive reactions of the students, visual proofs can easily make you think in wrong direction so visualization can not replace the proof in a classical notation. Emphasize that in some examples there is only incomplete induction so, to be a proof, each visualization must be accompanied by mathematically logical explanation.

Životopis

Rođena sam u 25.8.1993. u Zagrebu gdje sam pohađala Osnovnu školu Ivana Gundulića te kasnije XV. gimnaziju. U akademskoj godini 2012./2013. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike koji završavam 2014./2015. Godine 2016./2017. upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer te ovim radom završavam akademsko obrazovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Tijekom studiranja, radila sam u Photomathu kao kreator matematičkog sadržaja.